浙江理工大学学报，第 33 卷，第 1 期，2015 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 33，No. 1，Jan. 2015

文章编号：1673-3851 (2015) 01-0130-05

在 MVBVF 条件下的加权可积性

郭燕蓉
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：将系数数列的 MVBV 条件推广到函数的 MVBV 条件，分别给出了 MVBV 条件下正弦积分与余弦积分加权可积的充分必要条件，并利用 Cauchy 收敛准则、分部积分和适当放缩等数学方法进行证明，从而进一步完善了三角级数可积性的理论。

关键词：加权可积性；正弦积分；余弦积分；均值有界变差
中图分类号：O174.22　　**文献标志码**：A

0　引　言

如果定义在 $\boldsymbol{R}_+$ 的非负局部有界变差函数 $f(x)$ 对某个 $\lambda\geqslant2$，及某个非负实数 $A\geqslant1$，使得对任意 $a\geqslant A$ 有

$$\int_a^{2a}|\,\mathrm{d}f\,|\leqslant\frac{M}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中 M 是只与函数 $f(x)$ 有关的确定函数，则称函数 $f(x)$ 为均值有界变差函数，记 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$ (mean value bounded variation functions)。

上述定义是对文献[1]中的均值有界变差数列(MVBVS)定义的推广，即将系数数列的 MVBV 条件推广到函数的 MVBV 条件。在此之前，Boas[2] 和 Heywood[3] 等数学家对系数数列在加权情况下给出了相应的结论。另外，Wang 等在文献[4]中也对其作了相应的推广。

本文给出了几个关于 MVBVF 的加权可积性的结果，其中的 M_0、M、M_1、M_2、M_3 是正值常数，在不同的情况它的取值有所不同。

1　引理及证明

引理 1.1　设 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$ 是一个非负函数，那么

$$f(x)\leqslant\frac{M}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t。$$

引理 1.2　若对于某个常数 $\lambda\geqslant2$，$A\geqslant1$ 使定义在 $\boldsymbol{R}_+$ 上的 $f(x)$ 满足公式(1)，即 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$，则对于任意的 $a>A$，有

$$\int_a^{\infty}|\,\mathrm{d}f(x)\,|\leqslant M\int_{a/\lambda}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x。$$

引理 1.1 的证明：由 MVBVF 定义可知，对于任意的 $x\leqslant y\leqslant2x$，有

$$f(x)-f(y)\leqslant|\,f(x)-f(y)\,|\leqslant\int_x^{2x}|\,\mathrm{d}f(t)\,|\leqslant\frac{M_1}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t,$$

对上式两边在区间 $[x,2x]$ 上对 y 取积分得

$$\int_x^{2x}[f(x)-f(y)]\mathrm{d}y\leqslant\int_x^{2x}\frac{M_1}{x}\mathrm{d}y\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t=x\cdot\frac{M_1}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t=M_1\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t,$$

再对其进行移项可得

$$\int_x^{2x}f(x)\mathrm{d}y\leqslant\int_x^{2x}f(y)\mathrm{d}y+M_1\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t\leqslant M\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t。$$

由于 $\int_x^{2x}f(x)\mathrm{d}y=xf(x)$，所以上式可变为

$$xf(x)\leqslant M\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$f(x)\leqslant\frac{M}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(t)\mathrm{d}t。$$

收稿日期：2014－06－25
作者简介：郭燕蓉(1989－)，女，山西大同人，硕士研究生，主要从事逼近论中的构造性分析方面的研究。

引理 1.2 的证明: 当右端广义积分发散时不等式显然成立,下面考虑 $f(x)/x\in L^1(\boldsymbol{R}_+)$ 的情况,由积分区间可加性并利用公式(1)可得

$$\int_a^\infty |\mathrm{d}f(x)| = \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k a}^{2^{k+1}a} |\mathrm{d}f(x)| \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{M}{2^k a}\int_{2^k a/\lambda}^{\lambda 2^k a} f(x)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$M_2\sum_{k=0}^\infty \int_{2^k a/\lambda}^{\lambda 2^k a} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant M_3\int_{a/\lambda}^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\text{。}$$

2　定理及证明

定理 2.1　设 $0<\gamma<2$,$f(x)\in \mathrm{MVBVF}$,如果

$$\int_1^\infty x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{2}$$

则对于任意的 $B>0$,成立

$$\int_0^B t^{-\gamma} | f^*(t) | \mathrm{d}t < \infty \tag{3}$$

其中 $f^*(t) = \int_0^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的正弦积分。

证明: 因为 $f(x)\in \mathrm{MVBVF}$,$\int_1^\infty x^{\gamma-1}f(x)\mathrm{d}x<\infty$,由引理 1.1 可知

$$f(x) \leqslant \frac{M}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant M_1\int_{x/\lambda}^{\lambda x}\frac{1}{t}\cdot f(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$M_2\int_{x/\lambda}^{\lambda x} t^{\gamma-1}\cdot f(t)\mathrm{d}t,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$。再由引理 1.2 可知

$$\int_1^\infty |\mathrm{d}f(x)| = \int_1^\lambda |\mathrm{d}f(x)| + \int_\lambda^\infty |\mathrm{d}f(x)| \leqslant$$

$$\int_1^\lambda |\mathrm{d}f(x)| + M\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_1^\lambda |\mathrm{d}f(x)| + \int_1^\infty f(x)\cdot x^{\gamma-1}\mathrm{d}x <$$

$$\infty$$

成立。又因为

$$\left|\int_T^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$\left|\int_T^\infty \frac{f(x)}{t}\mathrm{d}(\cos tx - \cos Tt)\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{1}{t}\int_T^\infty (\cos tx - \cos Tt)\mathrm{d}f(x)\right| \leqslant \frac{M}{t}\int_T^\infty |\mathrm{d}f|\text{。}$$

由 Cauchy 判别法知积分 $\int_1^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,\pi)$ 内处处收敛,且等于其和函数 $|f^*(t)| = \int_0^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x$。由不等式 $|\sin t| \leqslant |t|$ 可知

$$|f^*(t)| \leqslant \int_0^{1/t} f(s)|\sin st|\mathrm{d}s + \left|\int_{1/t}^\infty f(s)\sin st\,\mathrm{d}s\right|,$$

对上式利用分部积分法可得

$$\left|\int_{1/t}^\infty f(s)\sin st\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\left|\int_{1/t}^\infty \frac{-f(s)}{t}\mathrm{d}(\cos st - \cos 1)\right| \leqslant$$

$$\left|\int_{1/t}^\infty \frac{(\cos 1)-(\cos st)}{t}\mathrm{d}f(s)\right| \leqslant \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)|\text{。}$$

因此,当 $\frac{1}{t}\geqslant 1$ 时,

$$|f^*(t)| \leqslant \int_0^1 f(s)\cdot st\,\mathrm{d}s + \int_1^{1/t} f(s)\cdot st\,\mathrm{d}s +$$

$$\int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)| \leqslant Mt + \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)| + t\int_1^{1/t} sf(s)\mathrm{d}s\text{。}$$

当 $\frac{1}{t}<1$ 时,

$$|f^*(t)| \leqslant \int_0^1 f(s)\cdot st\,\mathrm{d}s + \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)| \leqslant$$

$$Mt + \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)|\text{。}$$

结合以上两个不等式可得

$$|f^*(t)| \leqslant Mt + \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t}|\mathrm{d}f(s)| + t\int_1^{1/t^*} sf(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\int_a^{b^*} := \begin{cases} 0, & a\geqslant b \\ \int_a^b, & a<b \end{cases}$。于是,在(3)中先将 t 变量替换为 $\frac{1}{t}$ 然后运用上式可得

$$\int_0^B t^{-\gamma}|f^*(t)|\mathrm{d}t = \int_{1/B}^\infty t^{\gamma-2}\left|f^*\left(\frac{1}{t}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$M\cdot B^{2-\gamma} + \int_{1/B}^\infty t^{\gamma-3}\mathrm{d}t\int_1^{t^*} sf(s)\mathrm{d}s + 2\int_{1/B}^\infty t^{\gamma-1}\mathrm{d}t\int_t^\infty |\mathrm{d}f(s)| =:$$

$$M\cdot B^{2-\gamma} + I_1 + I_2\text{。}$$

注意到 $0<\gamma<2$,交换积分次序直接计算可得

$$I_1 = \int_{1/B}^1 t^{\gamma-3}\mathrm{d}t\int_1^t sf(s)\mathrm{d}s + \int_1^\infty t^{\gamma-3}\mathrm{d}t\int_1^t sf(s)\mathrm{d}s =$$

$$O(1/B) + \int_1^\infty sf(s)\mathrm{d}s\int_s^\infty t^{\gamma-3}\mathrm{d}t =$$

$$O(1/B) + \int_1^\infty s^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s < \infty\text{。}$$

同时,对 I_2 应用引理 1.2 再交换积分次序可得

$$I_2 \leqslant M\int_{1/B}^\infty \mathrm{d}t\int_{t/\lambda}^\infty \frac{t^{\gamma-1}}{s}f(s)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$M\int_{1/(B\lambda)}^\infty \mathrm{d}s\int_{1/B}^{\lambda s} \frac{t^{\gamma-1}}{s}f(s)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$M\int_{1/(B\lambda)}^\infty s^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\text{。}$$

因此,由条件(2) 可知

$$I_2 \leqslant M\left(\int_{1/(B\lambda)}^1 + \int_1^\infty\right)s^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s \leqslant M_3\text{。}$$

所以

$$\int_0^\infty t^{-\gamma} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant M \cdot B^{2-\gamma} + I_1 + I_2 \leqslant M < \infty。$$

定理 2.1 得证。

定理 2.2　设 $0 < \gamma < 1$，$f(x) \in$ MVBVF，如果

$$\int_1^\infty x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{4}$$

则对于任意的 $B > 0$，成立

$$\int_0^B t^{-\gamma} \mid f^*(x) \mid \mathrm{d}t < \infty \tag{5}$$

其中 $f^*(t) = \int_0^\infty f(x)\cos tx\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的余弦积分。

证明：对于 $f(x)$ 的收敛性、可积性及其余弦积分的收敛性与定理 2.1 证明相同，于是有

$$\mid f^*(t) \mid \leqslant \int_0^{1/t} f(s) \mid \cos st \mid \mathrm{d}s + \left| \int_{1/t}^\infty f(s)\cos st\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_0^{1/t} f(s)\mathrm{d}s + \left| \int_{1/t}^\infty f(s)\cos st\,\mathrm{d}s \right|,$$

对上式利用分部积分法可得

$$\left| \int_{1/t}^\infty f(s)\cos st\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \int_{1/t}^\infty \frac{f(s)}{t}\mathrm{d}(\sin st - \sin 1) \right| \leqslant \left| \int_{1/t}^\infty \frac{(\cos st) - (\cos 1)}{t}\mathrm{d}f(s) \right| \leqslant \int_{1/t}^\infty \frac{2}{t} \mid \mathrm{d}f(s) \mid。$$

所以，$\mid f^*(t) \mid \leqslant \int_0^{1/t} f(s)\mathrm{d}s + M\int_{1/t}^\infty \frac{\mid \mathrm{d}f(s) \mid}{t}$。

于是，在(5)中先将 t 变量替换为 $\frac{1}{t}$ 再运用上式可得

$$\int_0^B t^{-\gamma} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t = \int_{1/B}^\infty t^{\gamma-2} \left| f^*\left(\frac{1}{t}\right) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{1/B}^\infty t^{\gamma-2}\mathrm{d}t \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + M\int_{1/B}^\infty t^{\gamma-1}\mathrm{d}t \int_t^\infty \mid \mathrm{d}f(s) \mid =: I_1 + I_2。$$

注意到 $0 < \gamma < 1$，交换积分次序直接计算可得

$$I_1 \leqslant \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_s^\infty t^{\gamma-2} f(s)\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^\infty s^{\gamma-1} f(s)\mathrm{d}s < \infty。$$

另外，由定理 1.1 可知 $I_2 \leqslant M_3$。

所以

$$\int_0^\infty t^{-\gamma} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant I_1 + I_2 < \infty。$$

定理 2.2 得证。

定理 2.3　设 $0 < \gamma < 2$，$f(x) \in$ MVBVF。如果 $\int_0^\infty t^{-\gamma} \mid f^*(x) \mid \mathrm{d}t < \infty$，则

$$\int_1^\infty x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

其中 $f^*(t) = \int_0^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的正弦积分。

证明：因为 $f^*(t)$ 是 $f(x)$ 的正弦变换，记

$$F^*(s) = \int_0^s f^*(t)\mathrm{d}t = \int_0^s \mathrm{d}t \int_0^\infty f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^s f(x)\sin tx\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(x) \cdot \frac{1-\cos sx}{x}\mathrm{d}x,$$

即

$$F^*(s) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \cdot 2\sin^2\frac{sx}{2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{2f(x)}{x} \cdot \sin^2\frac{sx}{2}\mathrm{d}x。$$

则对 $\lambda \geqslant 2$，

$$F^*\left(\frac{\pi}{2\lambda x_0}\right) = \int_0^\infty \frac{2f(x)}{x} \cdot \sin^2\frac{\pi x}{4\lambda x_0}\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} \frac{2f(x)}{x} \cdot \sin^2\frac{\pi x}{4\lambda x_0}\mathrm{d}x \geqslant M\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{M}{x_0}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} f(x)\mathrm{d}x。$$

由引理 1.1 可知，$f(x) \leqslant \frac{M}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x} f(t)\mathrm{d}t$，所以 $f(x) \leqslant \frac{M}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant M_1 F^*\left(\frac{\pi}{2\lambda x}\right)$。因此，利用 $F^*(s)$ 的定义可得：

$$\int_1^\infty x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M_1\int_1^\infty x^{\gamma-1} F^*\left(\frac{\pi}{2\lambda x}\right)\mathrm{d}x = M_1\int_1^\infty x^{\gamma-1}\mathrm{d}x \int_0^{\pi/2\lambda x} f^*(t)\mathrm{d}t \leqslant M_1\int_1^\infty x^{\gamma-1}\mathrm{d}x \int_0^{\pi/2\lambda x} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant M_1\int_1^\infty x^{\gamma-1}\mathrm{d}x \int_0^{\pi/x} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t。$$

在上式中进行变量替换取 $y = \frac{1}{x}$，即 $x = \frac{1}{y}$，可以得到

$$\int_1^\infty x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M_1 \cdot \left[-\int_1^0 \frac{1}{y^2} \cdot y^{-\gamma+1}\mathrm{d}y \int_0^{\pi y} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \right] = M_1\int_0^1 \frac{1}{y^2} \cdot y^{-\gamma+1}\mathrm{d}y \int_0^{\pi y} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t = M_1\int_0^1 y^{-\gamma-1}\mathrm{d}y \int_0^{\pi y} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t。$$

对上式右边进行交换积分次序并求积分可得

$$\int_1^{\infty} x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$M_1\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\int_{t/\pi}^{1} y^{-\gamma-1} \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}y \leqslant$$
$$M_1\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\gamma}-1\right]\cdot \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t =$$
$$M_1\int_0^{\pi}(t^{-\gamma}-1)\cdot \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant$$
$$M_1\int_0^{\pi} t^{-\gamma}\cdot \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant$$
$$M_1\int_0^{\infty} t^{-\gamma}\cdot \mid f^*(t) \mid \mathrm{d}t < \infty。$$

定理 2.3 得证。

定理 2.4　设 $0<\gamma<1, f(x)\in \mathrm{MVBVF}$。如果 $\int_0^{\infty} t^{-\gamma} \mid f^*(x) \mid \mathrm{d}t < \infty$,则

$$\int_1^{\infty} x^{\gamma-1} f(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

其中 $f^*(t)=\int_0^{\infty} f(x)\cos tx\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的余弦积分。

证明:先来考虑式子 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos st\,\mathrm{d}t$。先将式子中 xt 整体进行变量替换为 t 再进行求积分可得

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}\cos st\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos\frac{st}{x}\mathrm{d}\frac{t}{x} =$$
$$\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos\frac{s}{x}t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{s^2+x^2}。$$

那么,对于任意的 $x>1$,结合上式及已知条件并交换积分次序可知

$$\int_0^{\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty} f(s)\cos st\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\int_0^{\infty} f(s)\cos st\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{x}{s^2+x^2}f(s)\mathrm{d}s。$$

另外,对于任意的 $x>1$,以及 $s\in\left[\frac{x}{\lambda},\lambda x\right]$,有 $\frac{x^2}{s^2+x^2}=\frac{1}{1+\frac{s^2}{x^2}}\geqslant\frac{1}{1+\lambda^2}$。将其代入上面不等式中并应用引理 1.1 可得

$$\int_0^{\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \geqslant \int_{x/\lambda}^{\lambda x}\frac{x}{s^2+x^2}f(s)\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}\frac{x^2}{s^2+x^2}f(s)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\frac{1}{1+(s/x)^2}\cdot\frac{1}{x}\int_{x/\lambda}^{\lambda x}f(s)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$M_0 f(x)。$$

即

$$f(x)\leqslant M\int_0^{\infty} f^*(t)e^{-xt}\mathrm{d}t。$$

因此

$$\int_1^{\infty} x^{\gamma-1}f(x)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$M\int_1^{\infty} x^{\gamma-1}\mathrm{d}x\int_0^{\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t =$$
$$M\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_1^{\infty} f^*(t)\cdot x^{\gamma-1}\cdot\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x \tag{6}$$

对上式中 $\int_1^{\infty} x^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$ 中的 xt 整体进行变量替换为 z 可得

$$\int_1^{\infty} x^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x = \int_t^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}\left(\frac{z}{t}\right)\leqslant$$
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\gamma}}\cdot z^{\gamma-1}\cdot e^{-z}\mathrm{d}z = \Gamma(\gamma)\cdot\frac{1}{t^{\gamma}}。$$

将其代回到(6)中且结合已知条件可得

$$\int_1^{\infty} x^{\gamma-1}f(x)\mathrm{d}x \leqslant M\Gamma(\gamma)\int_0^{\infty} f^*(t)t^{-\gamma}\mathrm{d}t < \infty。$$

定理 2.4 得证。

3　结　语

结合均值有界变差数列的加权可积性的研究,本文通过运用一些类似的技巧手法及数学方法将其加权可积性推广到函数空间上,使得加权可积性在函数空间中得到更广泛的应用,从而为有界变差函数的研究提供有用的条件。

参考文献:

[1] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件:发展和应用[M]. 北京:科学出版社,2012.
[2] Boas Jr R P. Integrability of trigonometric series (III)[J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 1952, 3(1): 217-221.
[3] Heywood P. On the integrability of functions defined by trigonometric series [J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 1954, 5(1): 71-76.
[4] Wang M Z, Zhou S P. Applications of MVBV condition in L^1 integrability[J]. Acta Math Hungar, 2010, 129(1): 70-80.

Weighted Integrability under MVBVF Condition

GUO Yan-rong
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper generalizes MVBV condition of coefficient series to MVBV condition of function, gives sufficient and necessary condition of sine integral and cosine integral under MVBV condition respectively, and utilizes Cauchy convergence criterion, integration by parts, suitable scaling and other mathematical methods for confirmation so as to further perfect the integrability theory of trigonometric series.

Key words: weighted integrability; sine integral; cosine integral; bounded variation of mean value

(责任编辑：康　锋)

(上接第 81 页)

Analysis and Test of Transverse Vibration of Vibrating Plate of Rice Seed Metering Device

YU Ya-xin[1,2], *ZHANG Xiang*[1,2], *WU Fei*[1,2], *LIU Lei*[1,2]
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 2. Zhejiang Province Key Laboratory of Transplanting Equipment and Technology, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The transverse vibration feature of the vibrating plate of vibrating-type seed metering device is studied with a view to further improve the seeding accuracy in an ordered arrangement of super hybrid rice. The design scheme is as follows. Firstly, the operational principle of vibrating type seed metering device is stated, a mechanical model of transverse vibration of vibrating plate is built, and analysis on the leaping movement of rice seed on vibrating plate is made; then vibration test of vibrating plate is made with vibration test acquisition instrument and other equipment, the effect of excitation frequency and the angle of vibrating plate on transverse vibration of vibrating plate is analyzed, and the laws of transverse vibration of plate are drawn, and it is pointed out that the area for arranging guide plate on vibrating plate of seed metering device is: 400×300 mm; a V-shaped trough is connected for conveying rice seeds that have been arranged in a certain direction. Experimental results show that when excitation frequency is 4.5 Hz, amplitude is 3.5 mm, the inclination of vibrating plate is 10°, and the curvature of guide plate is 2.65, implementing the design scheme can effectively prevent rice seed from leaping, realize uniformly and orderly seeding, and meet the requirements for ordered and continuous seeding of super hybrid rice.

Key words: rectangle plate; transverse vibration; rice; seed metering device; agricultural machinery

(责任编辑：康　锋)