

关于马约拉纳准粒子量子态变换问题的研究

孙 耿

(江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

摘 要: 讨论量子点与马约拉纳粒子耦合量子态的变换问题。首先介绍了马约拉纳费米子及其性质;然后引入量子态的 Bloch 球表示以及转动算符,通过量子操控技术实现量子态绕 z 轴的任意角旋转及绕 xOy 平面的任意轴 π 旋转;最后通过数学方法证明了 2 个和 4 个马约拉纳粒子与量子点构成的体系不能实现绕 x 轴和 y 轴旋转任意角。

关键词: 马约拉纳准粒子; Bloch 球; 量子点; 转动算符

中图分类号: O413.1 **文献标志码:** A

0 引 言

量子力学是 21 世纪的两大理论物理支柱之一,基于量子力学发展起来的量子信息科学是当前的研究热点。量子信息是关于量子系统“状态”所带有的物理信息,它是计算机、信息科学与量子物理相结合而产生的新兴交叉学科^[1]。马约拉纳费米子是量子信息科学中一类重要的准粒子,但是这类准粒子至今尚未有确切的实验证明它的存在,科学家们一直在努力寻找它的藏身之处。Flensberg^[2]通过单电子控制研究马约拉纳粒子上的非阿贝尔操作,研究了马约拉纳算符单次及连续作用两次量子态的变换问题;Leijnse 等^[3]通过马约拉纳系统研究拓扑和自旋量子比特间的量子信息传输问题,并研究了量子点的自旋。本文将在此基础上,讨论马约拉纳算符连续作用多次量子态的变换问题,并运用数学手段进行了证明。

1 马约拉纳费米子

自然界中已知存在的有两类粒子:玻色子(如光子、介子)和费米子(如电子、质子),其中玻色子是自旋为整数的粒子,它服从玻色—爱因斯坦统计;费米子是自旋为半奇数的粒子,它服从费米—狄拉克统计。1937 年,意大利物理学家埃托雷·马约拉纳根

据量子力学原理推断出,自然界可能存在一类特殊的费米子,它的反粒子是其本身,这类粒子就是马约拉纳费米子。最近几年的实验研究成果表明^[2-3],马约拉纳费米子很可能存在于拓扑超导体的边缘,在准粒子激发过程中可能被检测到。

马约拉纳粒子的拓扑形态如图 1 所示,拓扑绝缘体 TS 的两端有两个马约拉纳费米子 M_1 、 M_2 。



图 1 马约拉纳粒子的拓扑形态

两个马约拉纳粒子构成一个普通的费米子,马约拉纳算符用 γ_1 和 γ_2 表示, \hat{c}^\dagger 、 \hat{c} 分别是费米子的产生算符和湮灭算符, γ_1 、 γ_2 和 \hat{c}^\dagger 、 \hat{c} 之间的关系可由下式表示:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \hat{c}^\dagger + \hat{c} \\ \gamma_2 = i(\hat{c}^\dagger - \hat{c}) \end{cases} \quad (1)$$

从式(1)可知 $\gamma_i = \gamma_i^\dagger$,即马约拉纳算符是厄米的。假设 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 是两个基本的粒子态,其中 $|0\rangle$ 代表空态, $|1\rangle$ 代表满态。根据量子力学占有数表象理论,可知:

$$\begin{cases} \hat{c}^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \hat{c} |1\rangle = |0\rangle \\ \hat{c}^\dagger |1\rangle = \hat{c} |0\rangle = 0 \end{cases} \quad (2)$$

结合式(1)、(2),可以得到:

$$\begin{cases} \gamma_1 |0\rangle = |1\rangle, \gamma_1 |1\rangle = |0\rangle \\ \gamma_2 |0\rangle = i|0\rangle, \gamma_2 |1\rangle = -i|0\rangle \end{cases} \quad (3)$$

为方便起见,将 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,用列矩阵表示, $|0\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|1\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,那么 2×2 的单位矩阵和三个泡利矩阵可由式(4)表示:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

σ_x, σ_y 分别作用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个态上,那么:

$$\sigma_x |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow |1\rangle \quad (5)$$

$$\sigma_x |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow |0\rangle \quad (6)$$

$$\sigma_y |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \rightarrow i|1\rangle \quad (7)$$

$$\sigma_y |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -i|0\rangle \quad (8)$$

根据式(3)、(5)–(8),可以看到 γ_1 相当于 σ_x 作用, γ_2 相当于 σ_y 作用,所以:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

2 量子态的 Bloch 球表示及转动算符

为了讨论量子态的旋转变换问题,下面来介绍一下量子态的 Bloch 球表示以及转动算符的定义。在量子信息理论中,量子态可以定义成二维复空间的矢量。假设 $|\psi\rangle$ 表示任意的一个量子态,Bloch 球可由式(10)表示^[4]:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (10)$$

球面上任意一点 (r, θ, φ) 对应一个量子态,并且 $r=1$,即 Bloch 球是半径为 1 的单位球。

再引入转动算符 $R_n(\varphi)$ 表示绕 n 轴转动 φ 角的算符^[5],

$$\begin{aligned} R_n(\varphi) &= \exp\left(\frac{-i\varphi n \cdot \sigma}{2}\right) = \cos \frac{\varphi}{2} I - i \sin \frac{\varphi}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} I - i \sin \frac{\varphi}{2} (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2n} = I$, $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2n+1} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$ 。

由于量子态有相因子不确定性,如果定义算符 $U = e^{i\varphi} R_n(\varphi)$,它与转动算符 $R_n(\varphi)$ 有着相同的作用效果。

3 两个马约拉纳粒子与量子点耦合

马约拉纳粒子 M_1 与量子点 D 的耦合,通过电压 V_g 控制耦合系数 V ,耦合示意如图 2 所示。



图 2 马约拉纳粒子 M_1 与量子点 D 的耦合

量子点 D 与马约拉纳粒子 M_1 耦合的 Hamilton 量形式如下:

$$H = H_D + H_T = \epsilon \hat{d}^\dagger \hat{d} + (v^* \hat{d}^\dagger - v \hat{d}) \gamma_1 \quad (12)$$

其中, $H_D = \epsilon \hat{d}^\dagger \hat{d}$ 是量子点的能量, ϵ 由拓扑超导体的化学势来确定, H_T 为隧穿哈密顿量, \hat{d}^\dagger, \hat{d} 是作用在 $|\cdots\rangle_D$ 的产生和湮灭算符。根据 Flensberg 的理论, γ_1 可以操控量子态的变换^[2], 即:

$$\gamma_1 \rightarrow \sigma_x = e^{i\frac{\pi}{2}} R_{n_x}(\pi) \quad (13)$$

同样,量子点 D 与马约拉纳粒子 M_2 耦合,对应的哈密顿量为:

$$H = \epsilon \hat{d}^\dagger \hat{d} + (v^* \hat{d}^\dagger - v \hat{d}) \gamma_2 \quad (14)$$

则 γ_2 对量子态进行操控可表示为:

$$\gamma_2 \rightarrow \sigma_y = e^{i\frac{\pi}{2}} R_{n_y}(\pi) \quad (15)$$

两个马约拉纳粒子 M_1, M_2 与同一个量子点 D 耦合,耦合系数分别为 V_1, V_2 ,如图 3 所示。

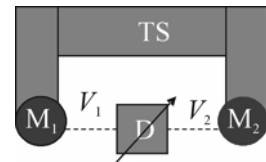


图 3 两个马约拉纳粒子与同一个量子点耦合耦合的哈密顿量形式可表示为:

$$H = \epsilon \hat{d}^\dagger \hat{d} + (v_{*1} \hat{d}^\dagger - v_1 \hat{d}) \gamma_1 + (v_{*2} \hat{d}^\dagger - v_2 \hat{d}) \gamma_2 \quad (16)$$

通过系数配置,Hamilton 可以写成^[4]:

$$H = \epsilon \tilde{d}^\dagger \tilde{d} + v(\tilde{d}^\dagger - \tilde{d}) \gamma_{12} \quad (17)$$

其中, $v^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$, $\gamma_{12} = \frac{1}{v}(|v_1| \gamma_1 + |v_2| \gamma_2)$,

$\tilde{d} = \hat{d} \exp[i \text{Arg}(v_1)]$, $\frac{v_1}{v_2}$ 是实数。

Hamilton 量与式(10)有着相同的形式,设 $a = \frac{|v_1|}{v}$, $b = \frac{|v_2|}{v}$, $a^2 + b^2 = 1$,研究 γ_{12} 作用后量子态如何变化,注意到:

$$\gamma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a - ib \\ a + ib & 0 \end{bmatrix} \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} R_{n_{xy}}(\pi) \quad (18)$$

其中, $n_{xy} = (a, b, 0)$, n_{xy} 表示 xoy 平面的转动轴。

如果连续作用两次,那么:

$$\begin{aligned}\gamma_{12}\gamma'_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & a-ib \\ a+ib & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a'-ib' \\ a'+ib' & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a-ib)(a'+ib') & 0 \\ 0 & (a+ib)(a'-ib') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (aa'+bb')-i(a'b-ab') & 0 \\ 0 & (aa'+bb')+i(a'b-ab') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (aa'+bb')-i(a'b-ab') & 0 \\ 0 & (aa'+bb')+i(a'b-ab') \end{bmatrix} \\ &= (aa'+bb')I - i(a'b-ab')\sigma_z \quad (19)\end{aligned}$$

其中, $a^2 + b^2 = 1$, $a'^2 + b'^2 = 1$, $(aa' + bb')^2 + (a'b - ab')^2 = 1$.

$\gamma_{12}\gamma'_{12} \rightarrow R_{n_z}(\varphi)$, 表示绕 Z 轴转任意的角 φ , 下面证明不管如何组合 γ_1, γ_2 , 进行操作都不能使量子态绕 x 轴及 y 轴转动任意的角。

设

$$\gamma_{12}^j = a_j \gamma_1 + b_j \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_j - ib_j \\ a_j + ib_j & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中 a_j, b_j 均为实数, $a_j^2 + b_j^2 \neq 0$ 。

$$\prod_{i=1}^n \gamma_{12}^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \prod_{j=1}^{2k+1} (a_j - (-1)^j ib_j) \\ \prod_{j=1}^{2k+1} (a_j + (-1)^j ib_j) & 0 \end{bmatrix} & (n \text{ 是奇数, } n = 2k+1) \\ \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{2k} (a_j - (-1)^j ib_j) & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^{2k} (a_j + (-1)^j ib_j) \end{bmatrix} & (n \text{ 是偶数, } n = 2k) \end{cases} \quad (21)$$

可以观察到, 当 n 为奇数时, 主对角线元素为 0, 副对角元素互为共轭; 当 n 为偶数时, 主对角线元素互为共轭, 副对角元素为零。

$$\prod_{i=1}^n \gamma_{12}^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 + i\eta_1 \\ \xi_1 + i\eta_1 & 0 \end{bmatrix} & (n \text{ 为奇数}) \\ \begin{bmatrix} \xi_2 + i\eta_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 - i\eta_2 \end{bmatrix} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (22)$$

其中, ξ_i, η_i 均为实数。

而绕 x 轴转动 φ 角 $R_{n_x}(\varphi)$ 、绕 y 轴转动 φ 角 $R_{n_y}(\varphi)$ 分别表示为:

$$\begin{aligned}R_{n_x}(\varphi) &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)I - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_x \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i \sin\frac{\varphi}{2} \\ -i \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{n_y}(\varphi) &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)I - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_y \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \quad (24)\end{aligned}$$

比较式(21)~(23)可以发现, 无论 n 是奇数还是偶数, 都不符合 $R_{n_x}(\varphi), R_{n_y}(\varphi)$ 的矩阵形式, 故量子态绕 x 轴 y 轴转动任意的角不能实现。

4 四个马约拉纳粒子与量子点耦合

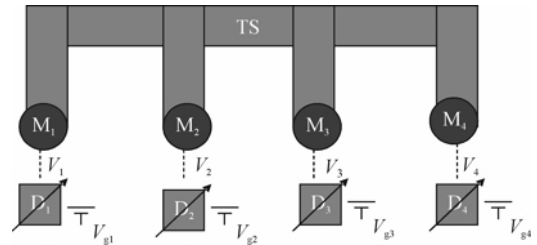


图4 四个马约拉纳粒子与量子点耦合示意图

$|\cdots\rangle_{M_{12}}$ 表示 M_1, M_2 两个马约拉纳粒子构成的费米子所处的态, $|\cdots\rangle_{M_{34}}$ 表示 M_3, M_4 构成的费米子所处的态。

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\rightarrow \sigma_x^{(1)} = \sigma_x \otimes I, \gamma_2 \rightarrow \sigma_y^{(1)} = \sigma_y \otimes I \\ \gamma_3 &\rightarrow \sigma_x^{(2)} = I \otimes \sigma_x, \gamma_4 \rightarrow \sigma_y^{(2)} = I \otimes \sigma_y \quad (25)\end{aligned}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 在基矢 $\{|0\rangle_{M_{12}}|0\rangle_{M_{34}}, |0\rangle_{M_{12}}|1\rangle_{M_{34}}, |1\rangle_{M_{12}}|0\rangle_{M_{34}}, |1\rangle_{M_{12}}|1\rangle_{M_{34}}\}$ 的矩阵表示如下:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (26)\end{aligned}$$

$\{|0\rangle_{M_{12}}|0\rangle_{M_{34}}, |1\rangle_{M_{12}}|1\rangle_{M_{34}}\}$ 为偶宇称基矢, $\{|0\rangle_{M_{12}}|1\rangle_{M_{34}}, |1\rangle_{M_{12}}|0\rangle_{M_{34}}\}$ 为奇宇称基矢, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 在 even-odd 空间的矩阵表示如下:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)\end{aligned}$$

整个马约拉纳体系的 Hamilton 为:

$$H = \sum_i H_{D_i} + \sum_i H_{T_i} = \sum_i \epsilon_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i + \sum_i (v_i^* \hat{d}_i^\dagger - v_i \hat{d}_i) \gamma_i \quad (28)$$

如果关闭 D_3, D_4 , 只让 D_1, D_2 作用, 那么:

$$H = \epsilon_1 \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + \epsilon_2 \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 + (v_1^* \hat{d}_1^\dagger - v_1 \hat{d}_1) \gamma_1 + (v_2^* \hat{d}_2^\dagger - v_2 \hat{d}_2) \gamma_2 \quad (29)$$

设 $\hat{d}_1 = \hat{d} e^{i\theta_1}$, $v_1 e^{i\theta_1} = a\lambda$, $v_1 e^{i\theta_2} = b\lambda$, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$,

那么 Hamilton 可以写成:

$$H = \epsilon \hat{d}^\dagger \hat{d} + (\lambda^* \hat{d}^\dagger - \lambda \hat{d}) \gamma_{12} \quad (30)$$

其中, $\gamma_{12} = a\gamma_1 + b\gamma_2$. γ_{12} 连续作用两次可以得到:

$$(\gamma_{12} \gamma'_{12})_{\text{even}} = \begin{bmatrix} aa' + bb' - i(a'b - ab') & 0 \\ 0 & aa' + bb' + i(a'b - ab') \end{bmatrix} = (aa' + bb')I - i(a'b - ab')\sigma_z = R_n(\varphi) \quad (31)$$

下面证明无论是奇空间还是偶空间都不能四个马约拉纳粒子体系实现绕 x 轴和 y 轴的任意旋转。

设:

$$\begin{aligned} \gamma_{1234}^{(j)} &= a_j \gamma_1 + b_j \gamma_2 + c_j \gamma_3 + d_j \gamma_4 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_j - id_j & a_j - ib_j \\ 0 & 0 & a_j + ib_j & c_j + id_j \\ c_j + id_j & a_j - ib_j & 0 & 0 \\ a_j + ib_j & c_j - id_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A^{(j)} \\ B^{(j)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $A^{(j)} = \begin{bmatrix} c_j - id_j & a_j - ib_j \\ a_j + ib_j & c_j + id_j \end{bmatrix}$, $B^{(j)} = \begin{bmatrix} c_j + id_j & a_j - ib_j \\ a_j + ib_j & c_j - id_j \end{bmatrix}$.

可以看到, $A^{(j)}, B^{(j)}$ 的矩阵元都有共同特点, 主

对角元素共轭, 副对角线元素亦共轭。 $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}$ 不管乘几次, 矩阵仍然是这种形式。

当 n 是奇数时,

$$\prod_{j=1}^n \gamma_{1234}^{(j)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & A^{(1)} B^{(2)} \dots B^{(n-1)} A^{(n)} \\ B^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(n-1)} B^{(n)} & 0 \end{bmatrix} & (n \text{ 为奇数时}) \\ \begin{bmatrix} A^{(1)} B^{(2)} \dots A^{(n-1)} B^{(n)} & 0 \\ 0 & B^{(1)} A^{(2)} \dots B^{(n-1)} A^{(n)} \end{bmatrix} & (n \text{ 为偶数时}) \end{cases} \quad (33)$$

通过计算可以得到, $A^{(j)}, B^{(j)}$ 不管混合乘几次, 得到的矩阵仍然是主对角线共轭, 副对角亦共轭。当 n 是偶数是, 对于奇空间 (或偶空间), $\gamma_{1234}^{(j)}$ 作用若干次以后, 仍然是主副对角线元素均共轭的形式

$$\left(\prod_{j=1}^{2k} \gamma_{1234}^{(j)} \right)_{\text{even or odd}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + i\eta_1 & \xi_2 + i\eta_2 \\ \xi_2 - i\eta_2 & \xi_1 - i\eta_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

观察上面矩阵的特点, 再与式 (22)、(23) 比较, 不管如何设定系数, 均不满足 $R_{n_x}(\varphi), R_{n_y}(\varphi)$ 的形式, 故不能用四个马约拉纳体系来实现绕 x 轴和 y 轴的旋转任意角度。

5 结 论

以上结果表明, 不管是一维空间还是二维空间的偶空间 (或奇空间), 量子态通过马约拉纳与量子点的耦合系统只能实现 z 轴旋转任意的角度和绕着 xoy 平面任意轴 π 转动, 不能实现绕着 x 轴和 y 轴任意的角度旋转, 如果初始的态位于球面上的一点 (r, θ, φ) , 只能变换到点 $(r, \pi - \theta, \varphi')$ 所表示的态, 也就说末态方位角 φ 可以是任意的, 而极角 θ 受初始的态限制, 从而不能用马约拉纳算符作用让量子态从 Bloch 球上的一个态变换到任意一个态。

本文讨论了普遍情况下马约拉纳算符连续作用量子态的变换问题, 并通过严格的数学逻辑论证, 遗憾的是并不能用这个体系来实现量子态从 Bloch 球上的一个态变换到任意一个态。理论研究前提是假设马约拉纳粒子的存在, 实验上并未发现这种粒子, 如果真找到了马约拉纳费米子, 拓扑量子计算将成为可能, 量子计算机的时代即将到来, 这将是信息科学的一次重大革命。

参考文献:

- [1] 胡艳敏. 固态量子信息处理和离子阱量子模拟[D]. 武汉: 中国科学院武汉物理与数学研究所, 2012: 1-10.
- [2] Flensberg K. Non-abelian operations on majorana fermions via single-charge control[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(9): 0905031-0905034.
- [3] Leijnse M, Flensberg K. Quantum information transfer between topological and spin qubit systems[J]. Physical Review Letters, 2011, 107(21): 2105021-2105025.
- [4] Mønsted B, Kovacic M. Quantum computing with Majorana Fermions coupled to quantum dots [D]. Copenhagen: University of Copenhagen, 2011.
- [5] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge University Press, 2010.
- [6] Law K T, Lee P A, Ng T K. Majorana fermion induced resonant Andreev reflection[J]. Physical Review Letters,

- 2009, 103(23): 2370011-2370014.
- [7] Nayak C, Simon S H, Stern A, et al. Non-Abelian anyons and topological quantum computation [J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(3): 1083-1159.
- [8] Fu L, Kane C L. Superconducting proximity effect and Majorana fermions at the surface of a topological insulator [J]. Physical Review Letters, 2008, 100(9): 0964071-0964074.
- [9] Kovalev A A, De A, Shtengel K. Spin transfer of quantum information between Majorana modes and a resonator[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(10): 1064021-1064026.
- [10] Banchi L, Giorda P, Zanardi P. Quantum information-geometry of dissipative quantum phase transitions[J]. Physical Review E, 2014, 89(2): 0221021-02210210.

Study on the Problem of Quantum State Transformation based on Majorana Quasiparticles

SUN Geng

(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University,
Nanchang 330022, China)

Abstract: The problem of quantum state transformation of quantum dots coupling with Majorana Quasiparticles is discussed in this article. Firstly, Majorana fermion and its nature is introduced; then Bloch sphere expression of quantum states and rotation operator are introduced, and quantum states rotating in an arbitrary angle along z-axis and along an arbitrary— π on xoy -plane is realized via quantum control technology; finally, it is proved with mathematical method that a system comprising two and four Majorana particles and quantum dots cannot realize rotation in an arbitrary angle along x -axis and y -axis.

Key words: Majorana quasiparticles; Bloch sphere; quantum dots; rotation operator

(责任编辑: 康 锋)