浙江理工大学学报(自然科学版),第 31 卷,第 5 期,2014 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 5, Sept. 2014

文章编号: 1673-3851 (2014) 05-0550-05

复模糊微分方程的初始值问题

吴　丹, 韩　维, 樊太和
(浙江理工大学科学计算与软件工程实验室, 杭州 310018)

摘　要: 复模糊微分方程的初始值问题是近年来研究的热点问题。首先证明了复模糊域上的牛顿-莱布尼茨公式,并建立了微分和积分之间的关系,然后定义了复模糊微分方程的初始值问题,最后给出了基于经典的不动点定理和基于 Zadeh 在复数域上的扩展原理两种初始值问题存在的结论。然后在此基础上对初始值进行求解。

关键词: 复模糊微分方程; 初始值问题; 牛顿-莱布尼茨公式; Zadeh 扩展原理
中图分类号: O175.8　　　**文献标志码:** A

0 引　言

复微分方程已经在很多领域得到了应用,例如 Gilboa 等[1]通过结合扩散方程和简化的 Schrodinger 方程来进行图像处理; Takac 等[2]将复 Ginzburg-Landau equation 应用在动力学上等。这些应用都是基于初始值和参数值易脆的假设下进行的,但是在许多应用中,由于复数表示的参数具有模糊性,因此,这些由复数表示参数的方程都具有模糊的特点。这类由复数作为参数的方程可用模型 $p'=f(t,p)$ 表示,其中,$t\in T=[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$, $T\to\overline{C}^*$, $\overline{C}^*$ 表示广义复模糊数的集合, $f: T\times\overline{C}^*\to\overline{C}^*$。这个模型称为复模糊方程。下面研究该模型的初始值问题:

$$p'=f(t,p),\ p(a)=p_0,$$

其中, $p_0\in\overline{C}^*$。这种解不稳定的情况,称为复模糊数域中的初始值问题。初始值问题的解可由下式表示:

$$p(t)=p_0+\int_T f(t,p(t))\mathrm{d}t$$

其中积分和微分是采用 Buckley 等[3-4]所给的定义。

本文首先建立复模糊数域上的牛顿-莱布尼茨公式,建立复模糊数域上的积分和微分的联系,使得在复模糊数域上定义初始值问题成为可能;然后通过两种方法来证明初始值问题的解的存在性,第一种是基于经典不动点定理的方法,第二种是基于 Zadeh 在复模糊数域上的扩展原理的方法。比较初始值问题的模糊微分方程[5-14],得出在复模糊数域的情况下,由于积分路径是独立的,所以初始值问题需要强有力的条件;在这个基础上,本文展开了对复模糊微分方程初始值问题的研究。

1 一些基本定义和结果

假设 C 是复数的集合, $\overline{Z}$ 是 C 的子集,其隶属函数为 $\mu(z|\overline{Z}): C\to[0,1]$。$\overline{Z}$ 的 α 水平集定义如下:

$$\overline{Z}(\alpha)=\{z|\mu(z|\overline{Z})\geqslant\alpha\},$$
$$0<\alpha\leqslant1; \overline{Z}(0)=\overline{U_{0<\alpha\leqslant1}\overline{Z}(\alpha)}(0)。$$

接下来定义广义复模糊数。

定义 1[15]　一个模糊集合 $\overline{Z}$ 是广义复模糊数,当且仅当

(1) $\mu(z|\overline{Z})$ 是上半连续的;

(2) $\overline{Z}(\alpha)$ 在 $0<\alpha\leqslant1$ 是完备的,弧连通的;

(3) $\overline{Z}(\overline{1})$ 不是空集。

备注:在 Wu 等[16]、Buckley 等[4]的定义中,在 (2) 中增加了一个额外的条件:"单连通"。然而, Qiu 等[15]提出了一个反例:在这个条件下广义复模

收稿日期: 2014-02-25
基金项目: 国家自然科学基金(61210004)
作者简介: 吴　丹(1987-),女,湖北孝感人,硕士研究生,研究方向为微分方程。

糊数在基本的算术运算下不是封闭的。

在此基础上,可以提出一个大胆的假设:$\overline{Z}(\alpha)$ 在 $0<\alpha\leqslant 1$ 是凸的,因此,$\overline{C}^*$ 将是所有的广义复模糊数,它的 α 水平集都是凸的。

令:$f:T\to\overline{C}^*$,$f(t)=\overline{W}(t)\in\overline{C}^*$,$\overline{W}(t)(\alpha)$ 是 $\overline{W}(t)$ 的 α 水平集,$0<\alpha\leqslant 1$。其中假设 $f(t)(1)=\overline{W}(t)(1)=\{w_1(t)\}$,对于 $t\in T$,其中 $w_1(t)\in\overline{W}(t)(1)$,$0<\alpha\leqslant 1$。接下来进一步假设 $w_1(t)$ 在 T 上是解析的,并且假设 $f(t)$ 是星形的。对任意的水平集 $\overline{W}(t)(\alpha)$,画一条射线 $L(\beta)$,在复平面上的 x 轴正半轴的画一个角度 $\beta(0\leqslant\beta<2\pi$,考虑到集合 $L(\beta)\cap\partial\overline{W}(t)(\alpha)=w(t,\alpha,\beta)$,因此当且仅当 $\overline{W}(t)(\alpha)$ 是一点,可以说 $f(t)$ 是星形的。$w(t,\alpha,\beta)=x(t,\alpha,\beta)+iy(t,\alpha,\beta)$,通过定义 $w(t,\alpha,0)=w(t,\alpha,2\pi)$,可以将这个概念拓展到 $\beta=2\pi$ 上。其中假设对所有的 β,$w_1(t)=w(t,1,\beta)$;对所有的 $t,\alpha,\beta,x(t,\alpha,\beta)$ 和 $y(t,\alpha,\beta)$ 都存在。

定义 2[4]　令:$f:T\to\overline{C}^*$ 是星形的,$f(t)$ 的导数 $f'(t)$ 是复数集合的模糊子集,并由它的隶属函数定义:$\mu(z|f'(t))=\sup\{\alpha|z=x(t,\alpha,\beta)+iy(t,\alpha,\beta),0<\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta<2\pi\}$。

定理 1[15]　如果 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 在 α 和 β 上是连续的,则 $f'(t)\in\overline{C}^*$。

在复数的情况下,$z=x+iy$ 是一个一般复数,令 $f(z)=\overline{W}(z)$,对任意的 α 水平集 $\overline{W}(z)(\alpha)$,$0<\alpha\leqslant 1$,画一条射线 $L(\beta)$,在复平面上的 x 轴正半轴的画一个角度 $\beta(0\leqslant\beta<2\pi)$。考虑到集合 $L(\beta)\cap\partial\overline{W}(z)(\alpha)=w(z,\alpha,\beta)$,$f(z)$ 是星形的,当且仅当 $\overline{W}(z)(\alpha)$ 是一个点。对所有的 $0<\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta<2\pi$,$w(z,\alpha,\beta)=\mu(x,y,\alpha,\beta)+iv(x,y,\alpha,\beta)$。通过定义 $w(z,\alpha,0)=w(z,\alpha,2\pi)$,可以将这个概念扩展到 $\beta=2\pi$,其中假设对所有的 $0\leqslant\beta<2\pi$,$w_1(z)=w(z,1,\beta)$。

令 $D\subseteq C$ 是闭的、有界的、单连通的数域,γ 是 D 中的可求曲线,因此 γ 可以用函数 $z=\phi(l)+i\varphi(l)$,$a\leqslant l\leqslant b$ 描述,其中 $\phi(l)$ 和 $\varphi(l)$ 是 $[a,b]$ 上的一个实值,所以 γ 将是 D 上的平滑曲线。如果 $g:\gamma\to C$,$g(z)=\mu(x,y)+iv(x,y)$ 其中 μ 和 v 是 $z=x+iy$ 的实值函数,而且 g 在 D 上是连续的,则 g 在 γ 上的复线性积分是:

$$\int_\gamma g\,\mathrm{d}z=\int_a^b\mu(\phi,\varphi)\phi'\mathrm{d}t-\int_a^b v(\phi,\varphi)\varphi'\mathrm{d}t+i\left(\int_a^b v(\phi,\varphi)\phi'\mathrm{d}t+\int_a^b\mu(\phi,\varphi)\varphi'\mathrm{d}t\right)$$

其中 $\phi'(\varphi')$ 表示 $\phi(\varphi)$ 的导数。

一个复模糊函数在 γ 上映射:$f:\gamma\to\overline{C}^*$,对 γ 中的 z,令 $f(z)=\overline{W}(z)$,假设对每一个在 D 中的 z,$\overline{W}(z)(\alpha)\neq\varnothing$。

定义 3[3]　令 $f:\gamma\to\overline{C}^*$,定义 $\Omega(\alpha)=\left\{\int_\gamma g\,\mathrm{d}z \mid g(z)\in\overline{W}(z)(\alpha),0<\alpha\leqslant 1\right\}$。$f(z)$ 在 γ 上的模糊线性积分 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$,通过它的隶属函数可以定义为复数的模糊子集:

$$\mu\left(w \mid \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right)=\sup\{\alpha\mid w\in\Omega(\alpha)\}$$

令 $z=\phi(t)+i\varphi(t)=t+i0$,$a\leqslant t\leqslant b$,可求曲线 γ 在位于复平面 x 轴正半轴的区间 $[a,b]$ 上。$\gamma=T$,复模糊映射 $f:\gamma\to\overline{C}^*$ 是 $f(t+i0)=\overline{W}(t)$,其中 $\overline{W}(t)$ 可以通过它的 α 水平集 $\overline{W}(z)(\alpha)$ 定义,$a\leqslant t\leqslant b$。

定理 2　如果 $f:T\to\overline{C}^*$ 是连续的,则 $\int_a^t f(s)\mathrm{d}s$ 在 T 是拉普拉斯连续的 。

定理 3　如果 $f,g:T\to\overline{C}^*$ 是可积的,$k\in R$,则:

(1) $\int_T[f(t)\pm g(t)]\mathrm{d}t=\int_T f(t)\mathrm{d}t\pm\int_T(t)\mathrm{d}t$;

(2) $\int_T kf(t)\mathrm{d}t=k\int_T f(t)\mathrm{d}t$;

(3) $\int_T H(f(t),g(t))\mathrm{d}t$ 存在,并且 $H\left(\int_T f(t)\mathrm{d}t,\int_T g(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\left|\int_T H(f(t),g(t))\mathrm{d}t\right|$。

2　复模糊数域上的牛顿-莱布尼茨公式

对 $0<\alpha\leqslant 1$,定义 $\Gamma(\alpha)=\{\dot{x}(t,\xi,\beta)+i\dot{y}(t,\xi,\beta)|\alpha\leqslant\xi\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\}$,于是可证明如下的结论。

引理 1　如果 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是连续的,则 $f'(t)(\alpha)=\Gamma(\alpha)$。

定理 4　(牛顿-莱布尼茨公式)函数 $f:T\to\overline{C}^*$ 是星形的,假设 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是连续的,在 D 上由 a 到 b 的积分曲线,有 $\int_T f'(t)\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$。

证明:

由于 $\dot{x}(t,\xi,\beta)$ 和 $\dot{y}(t,\xi,\beta)$ 在 α 和 β 上是连续的,从 Wu 等[16]中的定理 2,可以得知 $f'(t)\in\overline{C}^*$,由于 $f'(t)$ 是星形的,因此积分 $\int_T f'(t)\mathrm{d}t$ 是良定义的。

对于 $t\in T$,令 $f'(t)=\overline{W}(t)$,$w(t,\alpha,\beta)=L(\beta)\cup\partial\overline{W}(t)(\alpha)$,$f'(t)$ 的模糊线性积分被它的隶属函

数定义：$\mu(w\mid\int_T f'(t)\mathrm{d}t)=\sup\left\{\alpha\mid w=\int_T w(t,\alpha,\beta)\mathrm{d}t,0\leqslant\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\right\}$。从引理 1 中，有 $\overline{W}(t)(\alpha)=f'(t)(\alpha)=\{\dot{x}(t,\xi,\beta)+i\,\dot{y}(t,\xi,\beta)\mid\alpha\leqslant\xi\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\}$，因此，对所有的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi$，有

$$\begin{aligned}w(t,\alpha,\beta)&=L(\beta)\cap\partial\overline{W}(t)(\alpha)\\&=\partial\dot{x}(t,\xi,\beta)+i\dot{y}(t,\xi,\beta),\alpha\leqslant\xi\leqslant 1\\&=\dot{x}(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta)\end{aligned}$$

接下来证明 $\mu_{(w\mid\int_T f'(t)\mathrm{d}t)}=\sup\left\{\alpha\mid w=\int_T(x(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta))\mathrm{d}t,0\leqslant\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\right\}$。

由于 $\dot{x}(t,\alpha,\beta)$ 和 $\dot{y}(t,\alpha,\beta)$ 是连续的，$f'(t)$ 是解析的，由柯西积分定理可知，积分 $\mu w\mid\int_T f'(t)\mathrm{d}t=\sup_{\{\alpha\mid w=\int_T(x(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta))\mathrm{d}t\}}$ 与路径无关，因此可以得出：

$$\int_T(\dot{x}(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta))\mathrm{d}t=$$
$$\int_a^b(\dot{x}(t,\alpha,\beta)+i\dot{y}(t,\alpha,\beta))\mathrm{d}t=$$
$$x(b,\alpha,\beta)+iy(b,\alpha,\beta)-x(\alpha,\alpha,\beta)-iy(\alpha,\alpha,\beta)$$

隶属函数可以表示为：

$$\mu\left(w\mid\int_T f'(t)\mathrm{d}t\right)=\sup\{x(b,\alpha,\beta)+iy(b,\alpha,\beta)-x(\alpha,\alpha,\beta)-iy(\alpha,\alpha,\beta),0\leqslant\alpha\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\}=\mu(w\mid f(b)-f(a))$$

。这意味着 $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$。

证毕。

3 复模糊数初始值问题

在 C 中的任意两个非空完备集合 A 和 B，Hausdorff 距离可以定义为：

$$d_H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\}$$

其中 $\|.\|$ 表示 C 中的欧几里德范数。

通过 Hausdorff 距离的定义，也可以定义在 $\overline{C}^*$ 中的任意两个元素的距离。$\overline{Z_1}$ 和 $\overline{Z_2}$ 是 $\overline{C}$ 中的两个广义复模糊数，它们之间的距离可以定义为：

$$D(\overline{Z_1},\overline{Z_2})=\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(d_H\,\overline{Z_1}(\alpha),\overline{Z_2}(\alpha))。$$

令：$p:T\to\overline{C}^*$，p 在 $t_0\in T$ 上是连续的，如果 $\lim_{t\to t_0,t\in T}D(p(t),p(t_0))=0$。$p$ 在 T 上是连续的，如果它在 T 上的每一点都是连续的，那么表明：$C(T,\overline{C}^*)=\{p:T\to\overline{C}^*\}$。因此 P 在 T 上是连续的。

定义一个在 $C(T,\overline{C}^*)$ 的度量：$\mathcal{D}(p,q)=\sup_T D(p(t),q(t))$，通过借鉴 Puri 等[17]中关于实模糊情况的证明，能够证明 $C(T,\overline{C}^*)$ 是一个完备的度量空间。

令：$f:T\times\overline{C}^*\to\overline{C}^*$ 是一个函数，$p_0\in\overline{C}^*$，初始值问题：

$$p'=f(t,p),t\in T,p(a)=p_0$$

在 $p\in C(T,\overline{C}^*)$ 的解：$p'(t)=f(t,p(t))$，$t\in T$。

从 Wu 等[16]的定理 3 中，由 $\int_T f(t,p(t))\mathrm{d}t\in\overline{C}^*\cup\overline{C}^*$ 积分的紧密度，可得以下的等价描述。

定义 4 一个函数 $p\in C(T,\overline{C}^*)$ 在 T 上的连续可导，是初始问题的一个解，当且仅当 $p(t)=p(\alpha)+\int_\alpha^t f(t,p(t))\mathrm{d}t$。

接下来用两种方法来解复模糊初始值问题。

4 通过不动点定理证明解的存在性

考虑问题初始值问题 I，(IVP－I) $p'=f(t,p)$，$t\in T$，$p(a)=p_0$，其中 $f:T\times\overline{C}^*\to\overline{C}^*$，$p_0\in\overline{C}^*$，有以下存在的结果。

定理 5 假设 f 满足拉普拉斯条件，$D(f(t,p),f(t,q))\leqslant k(t)D(p,q)$，其中 $k:T\to R^+$ 是可积的，并且 $\int_T k(t)\mathrm{d}t=L<1$，问题(IVP－I)有唯一的解。

考虑映射 $F:C(T,\overline{C}^*)$ 定义为 $(F_p)(t)=p_0+\int_a^t f(t,p(t))\mathrm{d}t,t\in T$。因此初始值问题等价于找到一个的不动点，从定理 2 中，可以得出 $F_p\in C(T,\overline{C}^*)$。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(F_p,F_q)&=\sup_{t\in T}D\left(\int_T f(t,p(t))\mathrm{d}t,\int_T f(t,q(t)\right)\mathrm{d}t\\&=\sup_{t\in T}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}d_H\left(\int_T f(t,p(t)\right)\mathrm{d}t(\alpha),\\&\quad\int_T f(t,q(t))\mathrm{d}t(\alpha)=\\&\sup_{t\in T}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}d_H\left(\left\{\int_T w_p(t,\gamma,\beta)\mathrm{d}t,\alpha\leqslant\gamma\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\right\},\left\{\int_T w_q(t,\gamma,\beta)\mathrm{d}t,\alpha\leqslant\gamma\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\right\}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{t\in T}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\int_T d_H(\{w_p(t,\gamma,\beta)\mathrm{d}t,\alpha\leqslant\gamma\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\},w_q(t,\gamma,\beta)\mathrm{d}t,\alpha\leqslant\gamma\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2\pi\})$$

$$=\sup_{t\in T}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\int_T d_H(f(t,p(t))(\alpha),f(t,q(t))(\alpha))\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \sup_{t\in T}\int_T D(f(t,p(t)),(f(t,q(t))\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \sup_{t\in T}\int_T k(t)(D(p(t),q(t))\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_T k(t)\,\mathcal{D}(p,q)\mathrm{d}t$$

$$=\mathcal{D}(p,q)\int_T k(t)\mathrm{d}t$$

$$=L\,\mathcal{D}(p,q)$$

通过应用 Banach 压缩映射定理,F 在 $C(T,\overline{C}^*)$上有唯一的不动点,这意味着该积分方程有唯一的解。

证毕。

5　通过扩展原理证明解的存在性

在讨论存在性之前,先证明 Zadeh 的扩展原理在复模糊域上也成立。

令 f:$C\to C$ 是任意连续的函数,对所有的 $\bar{z}\in\overline{C}^*$,定义 Zadeh 的扩展 $\overline{f}$ 如下:

$$\mu(w|\overline{f}(\bar{z}))=\begin{cases}\sup_{\mu\in f^{-1}}\mu(u|\overline{Z}), & \text{如果 } f^{-1}(w)\neq 0;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$\overline{f}(\bar{z})\in\overline{C}^*$,这个定义是良定义的。事实上,有以下三种情况:

(1)$\mu(w|\overline{f}(\bar{z}))$是上半连续的,令 $w_n\to w_0$,$\mu(w_0|\overline{f}(\bar{z}))=\alpha$,$\mu(w_n|\overline{f}(\bar{z}))\alpha_n$。需要说明的是 $\lim\sup\alpha_n\leqslant\alpha$。

$$\begin{aligned}\mu(w_n|\overline{f}(\bar{z}))&=\sup_{\mu\in f^{-1}(w_n)}\mu(u|\overline{Z})\\&=\sup_{u\in f^{-1}(w_n)\cap\overline{Z}(0)}\mu(u|\overline{Z})\\&=\mu(u_n|\overline{Z})。\end{aligned}$$

对一些 $u_n\in f^{-1}(w_n)\cap\overline{Z}(0)$,由于 f^{-1}是闭的,$\overline{Z}(0)$是完备的,则 u_n 的一个子序列 u_{n_k} 收敛到 u_0,并且 $f(u_0)=w_0$。由于 $\mu(u|\overline{Z})$是上半连续的,则 $\lim\mu(u_{n_k}|\overline{Z})\leqslant\mu(u_0|\overline{Z})$。接下来,

$$\begin{aligned}\lim\mu(u_{n_k}|\overline{f}(\bar{z}))&=\lim\mu(u_{n_k}|\overline{Z})\\&\leqslant\mu(u_0|\overline{Z})\\&\leqslant u\in f^{-1}(w_0)\mu(u|\overline{Z})\\&=\mu(w_0|\overline{f}(\bar{z}))\end{aligned}$$

由于 $w_n\to w_0$,于是有 $\lim\mu(u_{n_k}|\overline{f}(\bar{z}))\leqslant\mu(w_0|\overline{f}(\bar{z}))$。

(2)对于 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,$\overline{f}(\bar{z})(\alpha)$是完备和弧形的,事实上通过借鉴 Barros[18] 中定理 5 的证明,可以证明:

$$\overline{f}(\bar{z})(\alpha)=f(\bar{z}(\alpha))。$$

由于当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时,f 是连续的,(1)是完备和弧形的,则 $\overline{f}(\bar{z})(\alpha)$也有相同的性质。

(3)$\overline{f}(\bar{z})(1)$是非空的,这是因为 $\overline{Z}(1)$也是非空的。

在给出(IVP－I)解的存在性之前,首先检查初始值问题在易脆的情况下(IVP－C):

(IVP－C)$p'=f(t,p)$,$t\in T$,$p(a)=p_0$

其中,f:$T\times C\to C$,$p_0\in C$。假设(IVP－C)在 $p_0\in U$ 上有一个解 $p(t,p_0)$,其中 U 是一个开集。于是对所有的 $t\in T$,$p(t,\cdot)$在 U 上是连续的,定义如下一个运算:

L_t:$U\to C$,$L_t(p_0)=p(t,p_0)$。

这表明(IVP－C)有唯一解,并且对于 p_0,L_t 是连续的,对 L_t 应用 Zadeh 的扩展原理,将得到一个映射:$\overline{L_t}$:$C\to\overline{C}^*$,$\overline{L_t}(\alpha)=p(t,p_0(\alpha))$。这是(IVP－I)的一个精确解。

再来考虑下面这个问题:

$p'=\lambda p(t)$,$t\in[a,b]$,$p(a)=p_0$

其中 $f(t,p)=\lambda p(t)$,$\lambda\in C$,$p_0\in\overline{C}^*$。首先,对于 $p_0\in C$,该方程的初始确定性解是 $L_t(p_0)=p_0e^{\lambda(t-a)}$,对于每一个 $t\in[a,b]$,方程在 p_0 点处是连续的。最后,结合扩展原理,对所有的 $p_0\in\overline{C}^*$,存在$\overline{L_t}(p_0)$,有$\overline{L_t}(p_0)(\alpha)=L_t(p_0(\alpha))=p_0(\alpha)e^{\lambda(t-a)}$。

6　结论和未来的工作

本文主要研究了复模糊方程的初始值问题,并且得到了一个新的牛顿-莱布尼茨公式,将 Zadeh 的扩展原理应用到了复模糊数域上,最后得到了初始值问题存在的结论,并对初始值进行了求解。

在以后的工作中,将进一步考虑复模糊微分方程和模糊微分方程的区别,并且研究其他类型的初始值问题,探索其他方法解出初始值问题的解。

参考文献:

[1] Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N A. Complex Difusion Processes for Image Filtering[M]// Scale-Space and Morphology in Computer Vision. Springer Berlin Heidelberg, 2001: 299-307.

[2] Takac P, Berg L, Engel W, et al. Dynamics on the attractor for the complex Ginzburg-Landau equation[J].

Rostock Math Kollop, 1995, 49: 163-184.

[3] Buckley J J. Fuzzy complex analysis II: integration[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49(2): 171-179.

[4] Buckley J J, Qu Y. Fuzzy complex analysis I: differentiation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 41(3): 269-284.

[5] Oberguggenberger M. Fuzzy and weak solutions to differential equations[C] //Proceedings of the Tenth International Conference IPMU. 2004: 517-524.

[6] Oberguggenberger M, Pittschmann S. Differential equations with fuzzy parameters[J]. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 1999, 5(3): 181-202.

[7] Seikkala S. On the fuzzy initial value problem[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24(3): 319-330.

[8] Song S, Wu C. Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110(1): 55-67.

[9]Ma M, Friedman M, Kandel A. Numerical solutions of fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 105(1): 133-138.

[10] Nieto J J. The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 102(2): 259-262.

[11] Kaleva O. A note on fuzzy differential equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2006, 64(5): 895-900.

[12] Kaleva O. Fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24(3): 301-317.

[13] Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 35(3): 389-396.

[14] Bede B, Rudas I J, Bencsik A L. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability[J]. Information Sciences, 2007, 177(7): 1648-1662.

[15] Qiu D, Shu L, Mo Z W. Notes on fuzzy complex analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(11): 1578-1589.

[16] Wu C, Qiu J. Some remarks for fuzzy complex analysis [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 106(2): 231-238.

[17] Puri M L, Ralescu D A. Fuzzy random variables[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 114(2): 409-422.

[18] Barros L C, Bassanezi R C, Tonelli P A. On the continuity of the Zadeh's extension[C]//Proceedings of the IFSA. 1997: 3-8.

[19] Dubois D, Prade H. Towards fuzzy differential calculus part 1: integration of fuzzy mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 8(1): 1-17.

[20] Buckley J J. Fuzzy complex numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(3): 333-345.

Initial Value Problem of Complex Fuzzy Differential Equations

WU Dan, *HAN Wei*, *FAN Tai-he*

(Lab of Intelligent Computing and Software Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The initial value problem for complex fuzzy equations is a research hotspot in recent years. We first prove Newton-Leibniz Formula on the complex fuzzy domian and establish the relationship between differential and integral. Then, we define initial value problem of fuzzy complex equations and finally give the conclusion that the twp initial values based on classical fixed point principle and Zadeh's extension principle in complex fuzzy domain have problems. Then, on this basis, we solve the initial value.

Key words: complex fuzzy differential equation; initial value problem; Newton-Leibniz formula; Zaden's extension principle

(责任编辑: 康 锋)