浙江理工大学学报,第 29 卷,第 5 期,2012 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29, No. 5, Sept. 2012

文章编号: 1673-3851 (2012) 05-0702-07

一类平面系统的单值奇点的特征

高金武, 黄土森
(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘　要: 考虑平面上由两个齐次多项式的和所定义的微分系统,并且假设原点是这类微分系统的孤立退化奇点,给出了这类系统的奇点是单值的一个充分必要条件,它推广了文献[1]中的相应结论。

关键词: 单值性问题; 特征方向; blow-up 技巧; 奇点的分类定理
中图分类号: O175.14　　**文献标识码:** A

0 引　言

在平面解析微分系统的定性理论研究中,确定系统的某个孤立奇点是否为焦点—中心类型,以及当确定孤立奇点是焦点—中心类型后,进一步确定何时是焦点,何时是中心是两个尚未解决的经典问题[1-2],并且与 Hilbert 第 16 问题的解决,特别地与研究微分系统的分支问题有密切的联系[3]。

对平面解析微分系统,如果有轨线进入系统的孤立奇点,则它只能螺旋形地进入或沿固定方向进入[4]。因此,平面解析微分系统的孤立奇点为焦点—中心类型的充分必要条件是没有轨线沿着固定方向进入(或离开)。这表明在焦点—中心类型的孤立奇点的某个充分小的邻域内可以定义一个单值的 Poincare 返回映射,因此,现在通常把焦点—中心类型问题也称为单值性问题[5]。

如果奇点的线性部分的系数矩阵不恒等于零,单值性问题基本上已经得到解决[2],因此目前的单值性问题主要研究当奇点的线性部分的系数矩阵恒等于零的平面解析微分系统。文献[1]研究了如下的由两个齐次多项式的和所定义平面解析系统的单值性问题,

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y)=P_m(x,y)+P_M(x,y),\\ \dot{y}=Q(x,y)=Q_m(x,y)+Q_M(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

其中 $P_k(x,y)$, $Q_k(x,y)$ 是 k 次齐次方程, $k\in\{m,M\}$, $1\leqslant m<M$, 并且 P 和 Q 是不可约的,从而原点 $O(0,0)$ 是一个孤立奇点;点号表示关于时间 t 的导数。

对上述系统(1)作极坐标变换 $R^2=x^2+y^2$, $\theta=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 并且作时间变换 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R^{m-1}$ 后得(仍用点号表示关于时间 s 的导数)

$$\begin{cases}\dot{R}=R[\cos\theta P_m(\theta)+\sin\theta Q_m(\theta)+\\ \qquad R^{M-m}(\cos\theta P_M(\theta)+\sin\theta Q_M(\theta))],\\ \dot{\theta}=\cos\theta Q_m(\theta)-\sin\theta P_m(\theta)+\\ \qquad R^{M-m}(\cos\theta Q_M(\theta)-\sin\theta P_M(\theta)).\end{cases}\tag{2}$$

其中 $P_k(\theta)=P_k(\cos\theta,\sin\theta)$, $Q_k(\theta)=Q_k(\cos\theta,\sin\theta)$, $k\in\{m,M\}$。

定义 0.1[1]　如果存在 θ_* 使得 $\cos\theta_* Q(\theta_*)-\sin\theta_* P(\theta_*)=0$ 成立,则称 $\theta=\theta_*$ 为系统(1)的一个特征方向。通常把沿固定方向进入(或者离开)奇点的轨线称为特征轨线。

文献[1]在研究中心问题时引入了下面两个条件。

定义 0.2[1]　称系统(1)满足条件(a),如果存在系统(1)原点 $O(0,0)$ 的某个邻域 v, 对任意的 $(x,y)\in v\backslash\{(0,0)\}$ 使得 $\Theta(x,y):=xQ(x,y)-yP(x,$

收稿日期: 2012—02—27
基金项目: 国家自然科学基金项目(10871181, 11101371)
作者简介: 高金武(1987—),男,山西阳泉人,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统的研究。

$y)\neq 0$ 成立。

由定义 0.2 可知，如果系统(1)满足条件(a)，则 $\Theta(x,y)$ 在 $v\backslash\{(0,0)\}$ 中恒为正或恒为负，并且用记号 $sign_\delta(\Theta)$ 表示 $\Theta(x,y)$ 在 $v\backslash\{(0,0)\}$ 上的符号。

定义 0.3[1]　称系统(1)满足条件(b)，如果该系统或者没有特征方向，或者所有的特征方向是孤立的，并且对每个特征方向 θ_* 满足 $P_m(\theta_*)=Q_m(\theta_*)=0$。

显然，如果系统(1)的特征方向都是孤立的，则必只有有限个特征方向，并且这样的特征方向的个数不超过 $2(m+1)$[2]。

设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是系统(1)孤立的特征方向，对 $j=1,2,\cdots,k$，记

$$a_j=\cos\theta_j,b_j=\sin\theta_j,$$

$$\alpha_j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(P_m^j(1,z))\Big|_{z=0},\beta_j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(Q_m^j(1,z))\Big|_{z=0},$$

其中

$$\begin{aligned}P_m^j(1,z)=&a_jP_m(a_j-b_jz,b_j+a_jz)+\\&b_jQ_m(a_j-b_jz,b_j+a_jz),\\Q_m^j(1,z)=&-b_jP_m(a_j-b_jz,b_j+a_jz)+\\&a_jQ_m(a_j-b_jz,b_j+a_jz).\end{aligned}\tag{3}$$

定义 0.4[1]　系统(1)所对应的向量场

$$X=(P_m(x,y)+P_M(x,y),Q_m(x,y)+Q_M(x,y))$$

称为是属于类 G 的，如果系统(1)或者没有特征方向，或者所有的特征方向是孤立的，并且对每一个孤立的特征方向 $\theta_j,j=1,\cdots,k$，都满足 $(\alpha_j)^2+(\beta_j)^2\neq 0$。

定理 0.5[1]　令 X 为系统(1)所对应的向量场，则下面的结论成立

(i) 如果系统(1)的孤立奇点 $O(0,0)$ 是单值性的，则条件(a)和(b)成立，并且 m 必为奇数。如果系统(1)还有特征方向，则 M 也必为奇数。

(ii) 假设 $X\in G$，则系统(1)的原点为单值的充分必要条件是该系统满足条件(a)和(b)，并且对每个特征方向 $\theta_j,j=1,\cdots,k$，成立

$$sign_\delta(\Theta)\cdot((2+M-m)\alpha_j-2\beta_j)\leqslant 0。$$

由定理可以看出，当存在系统(1)的孤立特征方向 θ_j 满足 $\alpha_j=\beta_j=0$ 时，则上面的关于系统(1)的孤立奇点 $O(0,0)$ 是单值性的判别准则将失效。据笔者所知，到目前为止，还没有学者研究过这种情形。笔者将利用 blow-up 技巧[6]及其奇点的分类定理[7]给出当系统(1)的孤立奇点 $O(0,0)$ 存在满足 $\alpha_j=\beta_j=0$ 的孤立特征方向 θ_j 时，孤立奇点 $O(0,0)$ 是单值的充分必要条件，并用具体例子表明它推广了文献[1]中的相应结论。

1　主要结果及其证明

记

$$\alpha_j^{(l)}=\frac{1}{l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l}(P_m^j(1,z))\Big|_{z=0},$$

$$\beta_j^{(l)}=\frac{1}{(l+1)!}\frac{\mathrm{d}^{l+1}}{\mathrm{d}z^{l+1}}(Q_m^j(x,y))|_{z=0},l=1,2,\cdots.\tag{4}$$

其中 $P_m^j(1,z),Q_m^j(1,z)$ 由(3)定义。

定义 1.1　称系统(1)所对应的向量场

$$X=(P_m(x,y)+P_M(x,y),Q_m(x,y)+Q_M(x,y))$$

属于类 G_1 的，如果下列条件之一成立

(i) 系统(1)不存在特征方向；

(ii) 系统(1)存在孤立的特征方向，且对每一个这样的特征方向 $\theta_j,j=1,\cdots,k$，或者 $(\alpha_j^{(1)})^2+(\beta_j^{(1)})^2\neq 0$，或者 $\alpha_j^{(1)}=\beta_j^{(1)}=0$，但是 $(\alpha_j^{(3)})^2+(\beta_j^{(3)})^2\neq 0$。

显然文献[1]中研究的向量场所在的类 $G\subset G_1$，笔者将证明如下结果

定理 1.2　记系统(1)所对应的向量场为 X，且 $X\in G_1$，则系统(1)的原点是单值性奇点的充要条件是

(i) 系统(1)满足条件(a)；

(ii) 系统(1)满足条件(b)；

(iii) m 为奇数。如果系统(1)还有特征方向，则 M 也为奇数；

(iv) 对每一个孤立的特征方向(如果存在的话)$\theta_j,j=1,\cdots,k$，

当 $(\alpha_j^{(1)})^2+(\beta_j^{(1)})^2\neq 0$ 时，成立 $sign_\delta(\Theta)\cdot((2+M-m)\alpha_j^{(1)}-2\beta_j^{(1)})\leqslant 0$；

当 $\alpha_j^{(1)}=\beta_j^{(1)}=0$ 而 $(\alpha_j^{(3)})^2+(\beta_j^{(3)})^2\neq 0$ 时，成立 $\alpha_j^{(2)}=\beta_j^{(2)}=0$ 且 $sign_\delta(\Theta)\cdot((4+M-m)\alpha_j^{(3)}-4\beta_j^{(3)})\leqslant 0$。

根据定理 0.5，定理 1.2 中的条件(a)和条件(b)是必要的。注意到系统(1)在旋转变换下是保持的[1]，为了证明充分性，不失一般性假设 $\theta=0$ 是特征方向，并记

$$\alpha^{(l)}=\frac{1}{l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l}(P_m(1,z))\Big|_{z=},$$

$$\beta^{(l)}=\frac{1}{(l+1)!}\frac{\mathrm{d}^{l+1}}{\mathrm{d}z^{l+1}}(Q_m(1,z))\Big|_{z=0},l=1,2,\cdots.$$

引理 1.3[1]　当 $\theta=0$ 是系统(1)的一个特征方向，且 $(\alpha^{(1)})^2+(\beta^{(1)})^2\neq 0$，系统(1)不存在特征轨线沿 $\theta=0$ 进入或者离开原点的充要条件是

(i) 存在充分小的实数 $\bar{R}>0,\delta>0$，对任意的 $(R,\theta)\in\{(0,\bar{R}]\cdot(-\arctan(\delta),\arctan(\delta))\}\backslash\{(0,0)\}$，

使得 $\Theta(R,\theta)=\cos\theta Q_m(\theta)-\sin\theta P_m(\theta)+R^{M-m}(\cos\theta Q_M(\theta)-\sin\theta P_M(\theta))\neq 0$；

(ii) $P_m(\theta)|_{\theta=0}=Q_m(\theta)|_{\theta=0}=0$；

(iii) $sign_\delta(\Theta)\cdot((2+M-m)\alpha^{(1)}-2\beta^{(1)})\leqslant 0$。

由引理 1.3 可知，只需要讨论当 $\theta=0$ 是系统(1)的一个特征方向，且满足 $\alpha^{(1)}=\beta^{(1)}=0$，而$(\alpha^{(3)})^2+(\beta^{(3)})^2\neq 0$ 时，系统(1)不存在特征轨线沿 $\theta=0$ 进入或者离开原点的充要条件即可。先给出如下引理：

引理 1.4 设 $\theta=0$ 是系统(1)的一个孤立的特征方向，若 $\alpha^{(1)}=\beta^{(1)}=0$，但$(\alpha^{(3)})^2+(\beta^{(3)})^2\neq 0$，则系统(1)没有轨线沿 $\theta=0$ 进入或者离开原点的充要条件是

(i) 存在充分小的实数 $\bar{R}>0,\delta>0$，对任意的 $(R,\theta)\in\{(0,\bar{R}]\cdot(-\arctan(\delta),\arctan(\delta))\}\backslash\{(0,0)\}$，

使得

$$\Theta(R,\theta)=\cos\theta Q_m(\theta)-\sin\theta P_m(\theta)+R^{M-m}(\cos\theta Q_M(\theta)-\sin\theta P_M(\theta))\neq 0;$$

(ii) $P_m(\theta)|_{\theta=0}=Q_m(\theta)|_{\theta=0}=0$；

(iii) m 与 M 均为奇数；

(iv) $\alpha^{(2)}=\beta^{(2)}=0$；

(v) $sign_\delta(\Theta)\cdot((4+M-m)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)})\leqslant 0$

证明：证明其必要性。条件(i)～(iii)已在文献[1]中证明，这里不再赘述；条件(iv)和(v)的必要性将在证明充分性时给出。

证明其充分性。不失一般性，假设 $sign_\delta(\Theta)=1$，则条件(v)等价于

$$(4+M-m)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}\leqslant 0$$

由条件(ii)知，$P_m(1,0)=Q_m(1,0)=0$。由条件(i)知，对任意的 $z\in(-\delta,\delta)$，使得

$$F(z):=Q_m(1,z)-zP_m(1,z)\geqslant 0。$$

由此可知，$F(z)$在 $z=0$ 的第一个非零导数的阶数为偶数，而

$$F^{(n)}(z)=Q_m^{(n)}(1,z)-nP_m^{(n-1)}(1,z)-zP_m^{(n)}(1,z),$$

于是，有

$$F(0)=Q_m(1,0)=0,$$
$$F'(0)=Q'_m(1,0)-P_m(1,0)=0,$$
$$F''(0)=Q''_m(1,0)-2P'_m(1,0)=2!\ (\beta^{(1)}-\alpha^{(1)})=0,$$
$$F'''(0)=Q'''_m(1,0)-3P''_m(1,0)=3!\ (\beta^{(2)}-\alpha^{(2)})=0,$$
$$F^{(4)}(0)=Q_m^{(4)}(1,0)-4P'''_m(1,0)=4!\ (\beta^{(3)}-\alpha^{(3)})\geqslant 0$$

此外还有 $\gamma:=Q_M(1,0)>0$。

下面借助于 blow-up 将奇点打开成初等奇点。作变换 $T_1:x_1=x^{M-m},y_1=\dfrac{y}{x}$。这一变换在 $R^2\backslash(0,0)$上并不是一个全局变换，但是在$\{x>0\}$上它是个好变换。下面仅在区域$\{x>0\}$内讨论变换 T_1，所得到的结果对于$\{x<0\}$也是成立的。因为 m 与 M 均为奇数，所以$(\dot{R}(R,\theta+\pi),\dot{\theta}(R,\theta+\pi))=(\dot{R}(R,\theta),\dot{\theta}(R,\theta))$。系统(1)经过变换 T_1 以及适当的时间参数化后(仍用点号表示关于新时间参数的导数，以后都采用这种约定)变为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=kx_1[P_m(1,y_1)+x_1P_M(1,y_1)],\\ \dot{y}_1=Q_m(1,y_1)-y_1P_m(1,y_1)+\\ \quad x_1(Q_M(1,y_1)-y_1P_M(1,y_1))\end{cases}\tag{5}$$

其中 $k=M-m$，系统(1)有无轨线沿 $\theta=0$ 方向进入或者离开奇点就转化为系统(5)有无轨线进入或者离开奇点$(x_1,y_1)=(0,0)$。因为系统(5)在奇点$(x_1,y_1)=(0,0)$处的微分矩阵为$\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma&0\end{pmatrix}$，它是幂零矩阵，为了把奇点初等化需要继续 blow-up。

对系统(5)作变换 $T_2:x_2=\dfrac{x_1}{y_1},y_1=y_1$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_2=x_2[(k+1)P_m(1,y_1)-\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1}+\\ \quad x_2((k+1)y_1P_M(1,y_1)-Q_M(1,y_1))],\\ \dot{y}_1=Q_m(1,y_1)-y_1P_m(1,y_1)+x_2y_1(Q_M(1,y_1)-\\ \quad y_1P_M(1,y_1))\end{cases}\tag{6}$$

系统(5)的奇点被打开成系统(6)的位于$\{y_1=0\}$上的奇点，因为

$$\begin{cases}\dot{x}_2|_{y_1=0}=-x_2Q_M(1,0),\\ \dot{y}_1|_{y_1=0}=0\end{cases}$$

所以系统(6)在$\{y_1=0\}$上唯一奇点是$(x_2,y_1)=(0,0)$，且其微分矩阵为$\begin{pmatrix}0&0\\ 0&0\end{pmatrix}$，表明奇点$(x_2,y_1)=(0,0)$还没有完全打开，因此还需对它施行 blow-up 过程；另一方面，变换 T_2 仅是将系统(5)的奇点沿 y_1 方向打开为简单些的奇点，还需把它沿 x_1 方向打开。对系统(5)作变换 $T_3:x_1=x_1,y_2=\dfrac{y_1}{x_1}$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=kx_1[P_m(1,x_1y_2)+x_1P_M(1,x_1y_2)],\\ \dot{y}_2=-y_2(1+k)P_m(1,x_1y_2)+\dfrac{Q_m(1,x_1y_2)}{x_1}-\\ \quad x_1y_2(k+1)P_M(1,x_1y_2)+Q_M(1,x_1y_2)\end{cases}\tag{7}$$

这时系统(5)的奇点被打开成系统(7)的位于$\{x_1=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_1|_{x_1=0}=0,\\ \dot{y}_2|_{x_1=0}=\gamma\end{cases}$$

所以系统(7)在$\{x_1=0\}$上没有奇点。表明系统(5)的奇点$(x_1,y_1)=(0,0)$在此方向上已经被完全打开了。

考虑系统(6)以及变换 $T_4: x_3=\dfrac{x_2}{y_1}, y_1=y_1$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_3=x_3\left[(k+2)\dfrac{P_m(1,y_1)}{y_1}-2\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1^2}+\right.\\ \qquad \left.x_3((k+2)y_1P_M(1,y_1)-2Q_M(1,y_1))\right],\\ \dot{y}_1=\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1}-P_m(1,y_1)+x_3y_1(Q_M(1,y_1)-\\ \qquad y_1P_M(1,y_1))\end{cases}\tag{8}$$

这时系统(6)的奇点打开成系统(8)位于$\{y_1=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_3|_{y_1=0}=-2x_3^2Q_M(1,0),\\ \dot{y}_1|_{y_1=0}=0\end{cases}$$

所以(8)在$\{y_1=0\}$上的奇点是$(x_3,y_1)=(0,0)$，且系统(8)在此奇点处的微分矩阵为$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，说明系统(6)的奇点在此方向上还没有打开，因此要继续施行 blow-up。

现在考虑系统(6)在$\{x_2=0\}$方向上的 blow-up，取变换 $T_5: x_2=x_2, y_3=\dfrac{y_1}{x_2}$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_2=(k+1)P_m(1,x_2y_3)-\dfrac{Q_m(1,x_2y_3)}{x_2y_3}+\\ \qquad x_2^2y_3(k+1)P_M(1,x_2y_3)-x_2Q_M(1,x_2y_3),\\ \dot{y}_3=-y_3(2+k)\dfrac{P_m(1,x_2y_3)}{x_2}+2\dfrac{Q_m(1,x_2y_3)}{x_2^2}-\\ \qquad x_2y_3^2(k+2)P_M(1,x_2y_3)+2y_3Q_M(1,x_2y_3)\end{cases}\tag{9}$$

这时系统(6)的奇点被打开为系统(9)的位于$\{x_2=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_2|_{x_2=0}=0,\\ \dot{y}_3|_{x_2=0}=2y_3\gamma\end{cases}$$

所以系统(9)在$\{x_2=0\}$上的奇点为$(x_2,y_3)=(0,0)$，且系统(9)在该奇点处的微分矩阵为$\begin{pmatrix}-\gamma&0\\0&2\gamma\end{pmatrix}$，即系统(9)的奇点为双曲鞍点，表明系统(6)的奇点在此方向上打开了。

考虑系统(8)以及变换 $T_6: x_4=\dfrac{x_3}{y_1}, y_1=y_1$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_4=x_4\left[(k+3)\dfrac{P_m(1,y_1)}{y_1^2}-3\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1^3}+\right.\\ \qquad \left.x_4((k+3)y_1P_M(1,y_1)-3Q_M(1,y_1))\right],\\ \dot{y}_1=\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1^2}-\dfrac{P_m(1,y_1)}{y_1}+x_4y_1(Q_M(1,y_1)-\\ \qquad y_1P_M(1,y_1))\end{cases}\tag{10}$$

这时(8)的奇点$(x_3,y_1)=(0,0)$被打开为(10)的位于$\{y_1=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_4|_{y_1=0}=x_4(k\alpha^{(2)}-3\gamma x_4),\\ \dot{y}_1|_{y_1=0}=0\end{cases}$$

现在可以断言$\alpha^{(2)}=0$。倘若不然，假设$\alpha^{(2)}\neq0$，则系统(10)在$\{y_1=0\}$上的奇点为$(x_4,y_1)=(0,0)$和$(x_4,y_1)=\left(\dfrac{k\alpha^{(2)}}{3\gamma},0\right)$，且系统(10)在奇点$(x_4,y_1)=(0,0)$的微分矩阵为$\begin{pmatrix}k\alpha^{(2)}&0\\0&0\end{pmatrix}$，而系统(10)在奇点$(x_4,y_1)=\left(\dfrac{k\alpha^{(2)}}{3\gamma},0\right)$处的微分矩阵为$\begin{pmatrix}k\alpha^{(2)}&*\\0&\dfrac{k\alpha^{(2)}}{3}\end{pmatrix}$。说明当$\alpha^{(2)}\neq0$时，系统(10)的奇点$(x_4,y_1)=\left(\dfrac{k\alpha^{(2)}}{3\gamma},0\right)$是拓扑结点，系统(10)中会有无数条轨线进入奇点$(x_4,y_1)=\left(\dfrac{k\alpha^{(2)}}{3\gamma},0\right)$。这与单值性假设矛盾，因此$\alpha^{(2)}=0$，且由前面的论述知$\beta^{(2)}=\alpha^{(2)}=0$，这也证明了条件(iv)的必要性。当$\alpha^{(2)}=0$时，系统(10)在$\{y_1=0\}$上仅有一个奇点$(x_4,y_1)=(0,0)$，且其微分矩阵为$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，表明系统(10)的奇点还没有打开，因此还需继续对它施行 blow-up。

考虑系统(8)以及变换 $T_7: x_3=x_3, y_4=\dfrac{y_1}{x_3}$，则

$$\begin{cases}\dot{x}_3=(k+2)\dfrac{P_m(1,x_3y_4)}{x_3y_4}-2\dfrac{Q_m(1,x_3y_4)}{x_3^2y_4^2}+\\ \qquad x_3^2y_4(k+2)P_M(1,x_3y_4)-2x_3Q_M(1,x_3y_4),\\ \dot{y}_4=-(3+k)\dfrac{P_m(1,x_3y_4)}{x_3^2}+3\dfrac{Q_m(1,x_3y_4)}{x_3^3y_4}-\\ \qquad x_3y_4^2(k+3)P_M(1,x_3y_4)+3y_4Q_M(1,x_3y_4)\end{cases}\tag{11}$$

这时(8)的奇点$(x_3,y_1)=(0,0)$被打开成(11)的位于$\{x_3=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_3|_{x_3=0}=0,\\ \dot{y}_4|_{x_3=0}=3y_4\gamma\end{cases}$$

所以(11)在$\{x_3=0\}$上的奇点为$(x_3,y_4)=(0,0)$，且微分矩阵为$\begin{pmatrix}-2\gamma&0\\0&3\gamma\end{pmatrix}$，说明(11)的奇点为双曲鞍点，这表明系统(8)的奇点$(x_3,y_1)=(0,0)$在此方向上打开了。

由于系统(10)的奇点还不是初等奇点，继续考虑系统(10)以及变换

$$T_8: x_5=\frac{x_4}{y_1}, y_1=y_1,$$

则

$$\begin{cases}\dot{x}_5=x_5\Big[(k+4)\dfrac{P_m(1,y_1)}{y_1^3}-4\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1^4}+\\ \qquad (k+4)x_5y_1P_M(1,y_1)-4x_5Q_M(1,y_1))\Big],\\ \dot{y}_1=\dfrac{Q_m(1,y_1)}{y_1^3}-\dfrac{P_m(1,y_1)}{y_1^2}+x_5y_1Q_M(1,y_1)-\\ \qquad x_5y_1^2P_M(1,y_1))\end{cases}\tag{12}$$

此时(10)的奇点打开为(12)位于$\{y_1=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_5|_{y_1=0}=x_5((k+4)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}-4\gamma x_5),\\ \dot{y}_1|_{y_1=0}=0.\end{cases}$$

所以(12)在$\{y_1=0\}$上的奇点为$(x_5,y_1)=(0,0)$和$(x_5,y_1)=\left(\dfrac{(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}}{4\gamma},0\right)$。

特别地,注意到系统(1)中区域$\{x>0\}$已经变换为系统(12)中区域$\{x_5>0\}$。因此系统(12)中区域$\{x_5\leqslant0\}$是“虚”的。因为(12)在$(x_5,y_1)=(0,0)$处的微分矩阵为

$$\begin{pmatrix}(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)} & 0\\ 0 & \beta^{(3)}-\alpha^{(3)}\end{pmatrix}$$

考虑系统(10)以及变换 T_9:$x_4=x_4,y_5=\dfrac{y_1}{x_4}$,则

$$\begin{cases}\dot{x}_4=(k+3)\dfrac{P_m(1,x_4y_5)}{x_4^2y_5^2}-3\dfrac{Q_m(1,x_4y_5)}{x_4^3y_5^3}+\\ \qquad x_4^2y_5(k+3)P_M(1,x_4y_5)-3x_4Q_M(1,x_4y_5),\\ \dot{y}_5=-(k+4)\dfrac{P_m(1,x_4y_5)}{x_4^3y_5}+4\dfrac{Q_m(1,x_4y_5)}{x_4^4y_5^2}-\\ \qquad x_4y_5^2(k+4)P_M(1,x_4y_5)+4y_5Q_M(1,x_4y_5)\end{cases}\tag{13}$$

此时系统(10)的奇点打开为系统(13)位于$\{x_4=0\}$上的奇点。因为

$$\begin{cases}\dot{x}_4|_{x_4=0}=0,\\ \dot{y}_5|_{x_4=0}=y_5((4\beta^{(3)}-(4+k)\alpha^{(3)})y_5+4\gamma),\end{cases}$$

所以(13)在$\{x_4=0\}$上的奇点为$(x_4,y_5)=(0,0)$和$(x_4,y_5)=\left(0,\dfrac{4\gamma}{(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}}\right)$。

特别地,当$(4+k)\alpha^3-4\beta^3=0$时,(13)的奇点仅有$(x_4,y_5)=(0,0)$。同样注意到系统(1)中区域$\{x>0\}$已经变换为系统(13)中区域$\{y_5>0\}$,因此系统(12)中区域$\{y_5\leqslant0\}$是“虚”的。(13)在奇点$(x_4,y_5)=(0,0)$处的微分矩阵为$\begin{pmatrix}-3\gamma & 0\\ 0 & 4\gamma\end{pmatrix}$。现在分如下几种情形来讨论:

(a) 当$(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}\neq0,\beta^{(3)}-\alpha^{(3)}>0$时,

(i) 若$(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}<0$,则系统(12)和系统(13)的奇点满足

$$(x_5,y_1)=\left(\frac{(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}}{4\gamma},0\right)\in\{x_5<0\}$$

和

$$(x_4,y_5)=\left(0,\frac{4\gamma}{(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}}\right)\in\{y_5<0\}。$$

说明此时系统(12)和系统(13)的奇点分别为$(x_5,y_1)=(0,0)$和$(x_4,y_5)=(0,0)$,它们均为双曲鞍点,并且这两个双曲鞍点的分界线为其坐标轴,然而这些坐标轴并不对应着系统(1)沿$\theta=0$进入或者离开原点的特征轨线。

(ii) 若$(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}>0$,则系统(12)中的奇点$(x_5,y_1)=(0,0)$为双曲结点,这时将有无数条特征轨线沿$\theta=0$进入或离开原点。

(b) 当$\beta^{(3)}-\alpha^{(3)}=0$时,则设$\lambda=(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}\neq0$,将系统(12)简记为

$$\begin{cases}\dot{x}_5=x_5[\Phi_1(y_1)+x_5\Phi_2(y_1)],\\ \dot{y}_1=\Psi_1(y_1)+x_5\Psi_2(y_1)\end{cases}$$

为应用奇点的分类定理[7],将上述系统改写为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\dfrac{1}{\lambda}[\Psi_1(y_1)+x_5\Psi_2(y_1)]=X(y_1,x_5),\\ \dot{x}_5=\dfrac{x_5}{\lambda}[\Phi_1(y_1)+x_5\Phi_2(y_1)]=x_5+Y(y_1,x_5)\end{cases}$$

注意到$x_5+Y(y_1,x_5)=0$过$(x_5,y_1)=(0,0)$的唯一解为$x_5=0$,而

$$F(y_1):=Q_m(1,y_1)-y_1P_m(1,y_1)=y_1^3\Psi_1(y_1)\geqslant0,$$

因为$F(y_1)$在$y_1=0$处的第一个非零导数的阶数为偶数,不妨假设$F^{(2n)}(y_1)|_{y_1=0}>0$为$F(y_1)$在$y_1=0$处的第一个非零的导数。则

$$F^{(2n)}(y_1)=(y_1^3\Psi_1(y_1))^{(2n)}=\sum_{i=0}^{2n}C_{2n}^{i}(y_1^3)^{(k)}(\Psi_1(y_1))^{(2n-k)}=6C_{2n}^3\Psi_1^{(2n-3)}(0)>0,$$

应用归纳法证明$\Psi_1^{(2n-3)}(0)>0$是$\Psi_1(y_1)$在$y_1=0$处的第一个非零的导数。而

$$X(y_1,0)=\frac{\Psi_1(y_1)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda(2n-3)!}\Psi_1^{(2n-3)}(0)y_1^{2n-3}+\cdots。$$

由奇点的分类定理:当$\lambda<0$时,奇点$(x_5,y_1)=(0,0)$是拓扑鞍点;当$\lambda>0$时,奇点$(x_5,y_1)=(0,0)$是拓扑结点。因此当$\beta^{(3)}-\alpha^{(3)}\geqslant0$时,只有$(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}<0$才能保证系统(1)没有特征轨线沿$\theta=0$进入或者离开原点,进而也证明了条件(v)的必要性。

(c) 当$(4+k)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}=0$时,因为$(\alpha^{(3)})^2+(\beta^{(3)})^2\neq0$,所以

$$\mu=\beta^{(3)}-\alpha^{(3)}=\frac{k\alpha^{(3)}}{4}>0。$$

先将系统(12)改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_5=x_5[\Phi_1(y_1)+x_5\Phi_2(y_1)],\\ \dot{y}_1=\Psi_1(y_1)+x_5\Psi_2(y_1)=\mu y_1+\cdots\end{cases}$$

为应用奇点的分类定理，我们将上述的系统改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_5=\dfrac{x_5}{\mu}[\Phi_1(y_1)+x_5\Phi_2(y_1)]=X(x_5,y_1),\\ \dot{y}_1=\dfrac{1}{\mu}[\Psi_1(y_1)+x_5\Psi_2(y_1)]=y_1+Y(x_5,y_1)\end{cases}$$

注意到 $y_1+Y(x_5,y_1)=0$ 过 $(x_5,y_1)=(0,0)$ 的唯一解为 $y_1=0$。将 $y_1=0$ 代入 $X(x_5,y_1)$ 中得 $X(x_5,y_1)=-\dfrac{4\gamma}{\mu}x_5^2$，其中 $\mu>0,\gamma>0$，所以 $-\dfrac{4\gamma}{\mu}<0$。由奇点的分类定理，系统(12)的奇点 $(x_5,y_1)=(0,0)$ 是鞍结点，并且结点区域在 $\{x_5<0\}$，中心流形在 x_5 轴上，另外一条分界线在 y_1 轴上，因此在区域 $\{x_5>0\}$ 中没有轨线进入或者离开系统(12)的奇点，这证明了没有系统(1)的特征轨线沿着 $\theta=0$ 进入或者离开原点，引理证毕。

引理 1.5　设向量场 $X\in G_1$，若由 X 确定的系统满足条件(a)和条件(b)，并且对每一个特征方向 $\theta_j,j=1,\cdots,k$，

当 $(\alpha_j^{(1)})^2+(\beta_j^{(1)})^2\neq 0$ 时，$sign_\delta(\Theta)\cdot((2+M-m)\alpha_j^{(1)}-2\beta_j^{(1)})\leqslant 0$；

当 $\alpha_j^{(1)}=\beta_j^{(1)}=0$，而 $(\alpha_j^{(3)})^2+(\beta_j^{(3)})^2\neq 0$ 时，$\alpha_j^{(2)}=\beta_j^{(2)}=0$ 且

$$sign_\delta(\Theta)\cdot((4+M-m)\alpha_j^{(3)}-4\beta_j^{(3)})\leqslant 0。$$

则 X 对应的系统(1)的原点是单值性奇点。

证明：对于每一个特征方向 θ_j，经过旋转变换 $x=a_ju-b_jv,y=b_ju+a_jv$ 后，系统(1)就可以写为：

$$\begin{cases}\dot{u}=a_jP_m(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)+\\ \quad b_jQ_m(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)+\\ \quad a_jP_M(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)+\\ \quad b_jQ_M(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv),\\ \dot{v}=-b_jP_m(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)+\\ \quad a_jQ_m(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)-\\ \quad b_jP_M(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)+\\ \quad a_jQ(a_ju-b_jv,b_ju+a_jv)\end{cases}\tag{14}$$

其中 a_j,b_j 如前面的定义。由于系统(14)是系统(1)经过旋转 θ_j 角度得到的新的系统，由假设知，系统(1)的特征方向 θ_j 已经变换为系统(14)的特征方向 $\theta=0$。对系统(14)应用引理 1.3 和引理 1.4 知，在方向 $\{v=0\}$ 上系统(14)没有特征轨线沿此方向进入或者离开原点，因此系统(1)没有特征轨线沿方向 $\theta=\theta_j$ 进入或者离开原点。由 θ_j 的任意性，系统(1)的原点是单值性奇点，引理证毕。

定理 1.2 的证明

证明：定理 1.2 的证明可以由定理 0.5 和引理 1.5 直接给出。

2　例　子

考虑如下的系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y^3+x^2y^3,\\ \dot{y}=3x^5+y^5\end{cases}\tag{15}$$

它的极坐标形式为：

$$\begin{cases}\dot{R}=-\cos\theta\sin^3\theta+\\ \quad R^2(\cos^3\theta\sin^3\theta+3\sin\theta\cos^5\theta+\sin^6\theta),\\ \dot{\theta}=\sin^4\theta+\\ \quad R^2(3\cos^6\theta+\cos\theta\sin^5\theta-\sin^4\theta\cos\theta)\end{cases}\tag{16}$$

系统(15)的原点仅有两个特征方向 $\{\theta_1=0\}$ 和 $\{\theta_2=\pi\}$，并且这两个方向是对称的，所以只需要讨论 $\{\theta_1=0\}$。因为在平面上除原点以外的点均成立

$$\Theta(x,y):=xQ(x,y)-yP(x,y)=3x^6+y^4(x^2+x+1)>0,$$

所以系统(15)满足条件(a)。又因为 $P_3(\theta_i)=Q_3(\theta_i)=0,i=1,2$，所以系统(15)满足条件($b$)。因为 $\alpha^{(1)}=\beta^{(1)}=0,\alpha^{(2)}=\beta^{(2)}=0,(\alpha^{(3)})^2+(\beta^{(3)})^2=1\neq 0$，并且

$$(4+M-m)\alpha^{(3)}-4\beta^{(3)}=2\alpha^{(3)}=-2<0$$

由定理 1.2，系统(15)的原点是单值性奇点。

应用 maple，选取系统(15)的轨线初始点为 $\{x(0)=0.3,y(0)=0.1\}$ 得到(15)位于原点附近的轨线图(见图 1)。

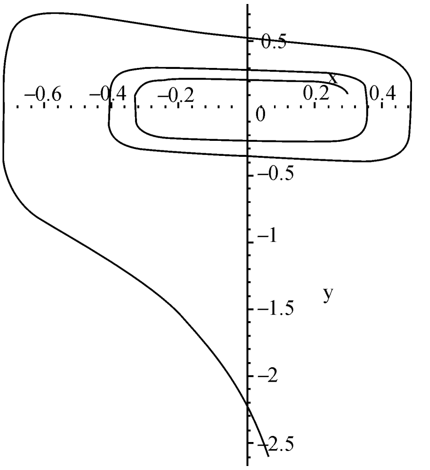

图 1　系统(15)的位于原点附近的轨线

4 讨 论

文献[1]研究了平面上由两个齐次多项式的和所定义的微分系统单值性问题,并对一类比较特殊的系统类给出了其孤立奇点是单值的一个充分必要条件。笔者对更广泛的一类系统给出了其孤立奇点是单值的一个充分必要条件,并用一个实例来检验所讨论的系统类的确推广了文献[1]中所讨论的系统类,从而所得到的结果本质上推广了文献[1]中的相应结果。然而,笔者所讨论的系统类还具有较强的特殊性,对于一般的系统类情形将是今后继续研究的课题。

参考文献:

[1] Gasull A, Llibre J, Manosa V, et al. The focus-centre problem for a type of degenerate system[J]. Nonlinearity, 2000, 13: 699-729.

[2] Algaba A, Garcia C, Reyes M. Characterization of a monodromic singular point of a planar vector field[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(16): 5402-5414.

[3] 陈兰荪,王明淑. 二次系统极限环的相对位置与个数[J]. 数学学报, 1979, 22(6):751-758.

[4] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社, 1985.

[5] Medvedeva N B. The first focus quantity of a complex monodromic singular point[J]. Journal of Mathematical Sciences, 1990, 50(1):1421-1436.

[6] Dumortier F. Singularities of vector fields in the plane [J]. Journal of Differential Equations, 1977, 23(1): 53-106.

[7] Dumortier F, Llibre J, Artes J. Qualitative Theory of Planar Differential Systems [M]. Berlin: Springer, 2006.

Characterization of the Monodromic Singular Point of a Class of Planar Systems

GAO Jin-wu, HUANG Tu-sen

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A class of planar differential systems defined by the sum of two homogeneous polynomials is considered. In our discussion, the origin is assumed to be an isolated and degenerated singular point for these differential systems. A necessary and sufficient condition of a focus-center singular point is given. This result generalizes the corresponding result in [1].

Key words: monodromy problem; characteristic direction; blow-up technique; theorem of classification of singular point

(责任编辑:马春晓)