

交叉型平面二自由度移动并联机构运动学性能分析

韩 阳, 胡 挺, 鲁 宁, 李秦川

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘 要: 为研究一种新型平面二自由度移动并联机构的运动学性能, 建立其运动学模型, 推导出位置正/逆解的解析表达式, 定义运动学性能指标, 分析不同构型的性能指标表达式, 探讨性能指标与机构尺寸之间的关系, 并绘制相关的性能图谱。得到该并联机构具有较大有效工作空间与机架尺寸比值、导轨长度短等优点。这些性能图谱为该并联机构的优化提供了参考。

关键词: 并联机构; 性能指标; 性能图谱

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A

0 引 言

并联机构以其高刚度、承载能力强、惯性小、精度高等特点^[1]已被广泛应用于航天、医疗、工业、军事等各个领域。近年来, 自由度 ≤ 6 的少自由度并联机构因结构简单、制造和控制成本低等优点成为各国学者研究的热点。

很多实际应用的场合要求并联机构的动平台作高速平面运动, 这为二自由度的并联机构的应用和研究提供了巨大空间^[2-4], 平面二自由度并联机构主要有 RPRPR、RRRPR、RPRRP、RRRRR、RRRRP、PRRRP 等形式, 这里 R 表示转动副, P 表示移动副, 其中结构对称的平面 5R 并联机构是其中的典型代表, 国内外许多学者对其进行了位置分析、工作空间、组装模式、奇异位型、性能图谱、运动学设计以及动态平衡等问题的研究^[5-11]。

与串联机构相比, 并联机构的主要不足在于其工作空间小, 因此工作空间是机构综合和优化的重要性能指标, 在相同尺寸参数条件下, 一般希望使机构有效工作空间与机架尺寸比值尽可能的大, 许多学者基于此对并联机构进行了优化与设计^[4, 12-13]。

本文首先分析交叉型平面二自由度移动并联机构运动学正反解, 定义有效工作空间与机架尺寸比

值、导轨长度以及动平台长度等性能指标, 分析不同构型下这些指标的表达式, 最后绘制这些性能指标与机构几何参数的关系图谱, 证明交叉型平面二自由度移动并联机构具有有效工作空间与机构尺寸比值大的优点, 同时这些图谱为该机构的优化设计提供重要的参考。

1 交叉型平面二自由度移动并联机构

1.1 机构简介

如图 1 所示, 交叉型平面二自由度移动并联机构机架通过支链 1、2 与动平台相连, 两条支链呈“交叉”形分布, 其中支链 1 采用平行四边形结构, 支链 1 中连杆 1、连杆 2 通过转动副与滑块和动平台相连,

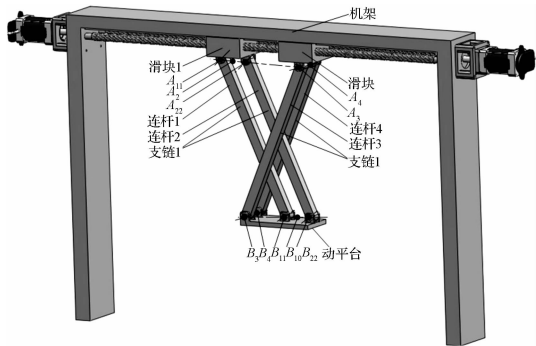


图 1 交叉型平面二自由度移动并联机构

其转动副的中心分别为 A_{11} 、 B_{11} 和 A_{22} 、 B_{22} ；支链 2 中连杆 3、连杆 4 通过转动副与滑块 2 和动平台相连，其转动副的中心分别为 A_3 、 B_3 和 A_4 、 B_4 ；滑块 1、2 通过移动副与机架相连；由于支链 1 采用平行四边形结构，因此选择 A_{11} 、 A_{22} 的中点 A_1 和 B_{11} 、 B_{22} 的中点 B_1 作为运动学分析的参考点，通过改变交叉型平面二自由度移动并联机构各分支中滑块的移动量，来实现动平台在平面一定范围内不同位置的变化。

1.2 位置正解分析

建立基坐标系 $\mathcal{O}: o-xy$ 和动坐标系 $\mathcal{O}': o'-x'y'$ 分别固结于机架和动平台，如图 2 所示。 o 是机架导轨的中点， o' 是动平台的参考点即 B_3B_1 中点， x 轴沿 oA_3 方向， x' 轴与 x 方向一致， $\mathbf{A}_i^{\mathcal{O}}$ 分别是 A_i ($i=1,3$) 在坐标系 \mathcal{A} 中的位置矢量， $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ 是 O' 在基坐标系 \mathcal{A} 中的位置矢量， $\mathbf{B}_i^{\mathcal{O}'}$ 分别是 B_i ($i=1,3$) 在坐标系 \mathcal{O}' 中的位置矢量， $\mathbf{B}_i^{\mathcal{O}}$ 是 B_i ($i=1,3$) 在坐标系 \mathcal{A} 中的位置矢量， $\mathbf{B}_{11}^{\mathcal{O}'}$ 是 B_{11} 在坐标系 $\mathcal{O}': o'-x'y'$ 中的位置矢量， L_x 是机架导轨长， l 是滑块 1 的宽度，且 $A_1B_1=A_3B_3=L$ ， $A_{11}A_{22}=B_{11}B_{22}=l$ ， $\mathbf{B}_3^{\mathcal{O}'}=-\mathbf{B}_1^{\mathcal{O}'}$ ， $\mathbf{B}_1^{\mathcal{O}'}=\mathbf{B}_{11}^{\mathcal{O}'}+\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_1$ ， $\mathbf{B}_1^{\mathcal{O}}=\mathbf{C}^{\mathcal{O}}+\mathbf{B}_1^{\mathcal{O}'}$ ， $\mathbf{B}_3^{\mathcal{O}}=\mathbf{C}^{\mathcal{O}}+\mathbf{B}_3^{\mathcal{O}'}$ 。

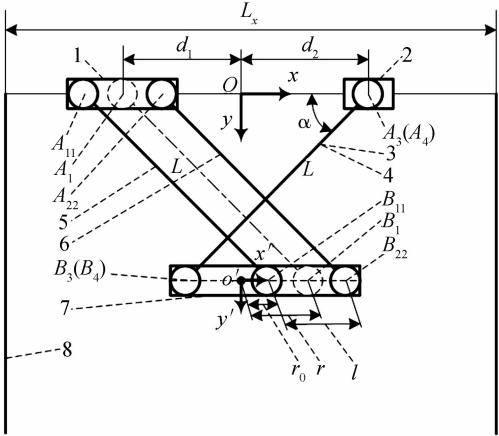


图2 交叉型平面二自由度移动并联机构简图

注：图中1、2分别是滑块1、2；7、8分别是动平台和机架；5、6、3、4分别是连杆1、2、3、4。

由矢量关系式 $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i=\mathbf{A}_i^{\mathcal{O}}-\mathbf{B}_i^{\mathcal{O}'}$ 且 $\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|=L$ ($j=1,3$)，可得：

$$\begin{cases} \left(d_1-x-r_0-\frac{l_0}{2}\right)^2+y^2=L^2 \\ \left(d_2-x+r_0+\frac{l_0}{2}\right)^2+y^2=L^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}_1^{\mathcal{O}}=(d_10)^T$ ， $\mathbf{A}_3^{\mathcal{O}}=(d_20)^T$ ， $\mathbf{B}_3^{\mathcal{O}'}=(-r\ 0)^T$ ， $\mathbf{B}_1^{\mathcal{O}'}=(r\ 0)^T$ ， $\mathbf{B}_{11}^{\mathcal{O}'}=(r\ 0)^T$ ， $\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_1=\left(\frac{l}{2}\ 0\right)^T$ ， $r=r_0+\frac{l}{2}$ 。

1.2.1 位置反解

交叉型平面二自由度移动并联机构的运动学反

解问题可归结为已知动平台参考点位置，求两个分支滑块位移，由式(1)得：

$$\begin{cases} d_1=x+r\pm\sqrt{L^2-y^2} \\ d_2=x-r\pm\sqrt{L^2-y^2} \end{cases} \quad (2)$$

由上式可知，运动学反解有4组可能解，为避免出现奇异位型，式子有唯一解，即

$$\begin{cases} d_1=x+r-\sqrt{L^2-y^2} \\ d_2=x-r+\sqrt{L^2-y^2} \end{cases} \quad (3)$$

1.2.2 位置正解

交叉型平面二自由度移动并联机构的运动学正解问题可归结为已知两个分支滑块的位置，求动平台参考点位置，由式(3)得：

$$\begin{cases} x=\frac{d_1+d_2}{2} \\ y=\sqrt{L^2-\left(\frac{d_2-d_1}{2}+r\right)^2} \end{cases} \quad (4)$$

2 性能指标

2.1 性能指标定义

给定动平台的有效工作空间为 $X_w\times Y_w$ ($y\in[H\ H+Y_w]$)，如图3所示，其关于基坐标系 \mathcal{O} 的 y 轴对称。

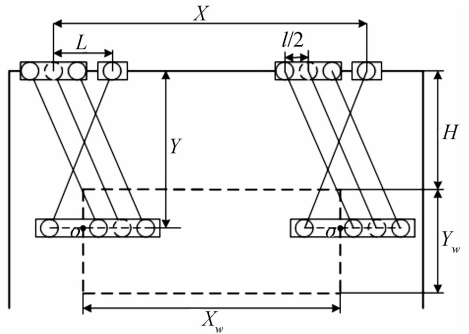


图3 动平台的有效工作空间

对于给定动平台参考点 O' 在工作空间 y 方向的值 Y ，要使动平台参考点 O' 沿 x 方向运动区域 X_w 内处处可达，那么滑块在导轨上运动区域 X 为：

$$X=L_d+X_w \quad (5)$$

式中 $L_d=\|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\|=\|d_2-d_1\|=2\sqrt{L^2-Y^2}-2r$ 。

由式(5)可以看出，当 L 、 r 、 l 以及 X_w 一定时，随着 Y 的增大， X 随之减小，在工作空间的上边界，即 $y=H$ 处， $X=2\sqrt{L^2-H^2}-2r+X_w$ 最大，考虑到滑块1的宽度 l ，若此时，导轨的最短长度满足如下关系式：

$$L_x\geq 2\sqrt{L^2-Y^2}-2r+\frac{l}{2}+X_w \quad (6)$$

则动平台参考点在工作空间 $X_w \times Y_w$ 内将处处可达,取式(6)的最小值作为导轨的长度,即

$$L_x=2\sqrt{L^2-Y^2}-2r+\frac{l}{2}+X_w \tag{7}$$

交叉型平面二自由度并联机构有效工作的面积^[4]为 $S_1=X_w \times Y_w$,机架尺寸^[4]为 $S_2=L_x \times (H+Y_w)$,定义导轨长度指标为 L_x ,动平台长度指标为 L_m ,有效工作空间与机架尺寸比值指标为 $\varphi=\frac{S_1}{S_2}$ 。

2.2 不同构型的性能指标

在实际的应用中往往要求充分利用机构的尺寸,即较大的 φ 值,当给定动平台参考点的有效工作空间 $X_w \times Y_w$ 后,即 S_1 一定,只有减小 S_2 才能达到提高 φ 值的目的,而减小 S_2 ,必须缩短机架导轨长度 L_x 。 L 、 l 以及 r 任意一个值的改变,都会影响 L_x 的大小,考虑到 $r=\frac{l}{2}+r_0$,且 r_0 是位置矢量 B_{11}^0 在动平台坐标系 $\phi'-o'x'y'$ 下的坐标值,原点 o' 位置的变化可以间接改变 r_0 的值,当 B_3 沿着动平台 $+x'$ 轴移动时, o' 位置随之发生变化,位置矢量 B_{11}^0 的坐标值 r_0 由正值变为负值, r 的值也随之发生变化。此过程可以组合成两种不同的构型,分析如下:

(1)当 B_3 位于 B_1 的左侧,且 o' 位于 B_1 的左侧时,如图 4(a)、图 4(b)所示,此时 $r_0>-\frac{l}{2}$ 且 $r>0$ 。

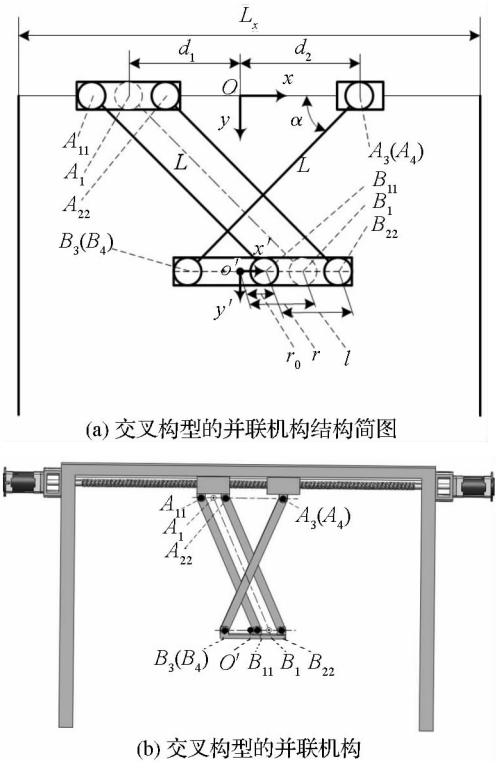


图 4 交叉构型

运动学反解为:

$$\begin{cases} d_1=x+r-\sqrt{L^2-y^2} \\ d_2=x-r+\sqrt{L^2-y^2} \end{cases} \tag{8}$$

运动学正解为:

$$\begin{cases} x=\frac{d_1+d_2}{2} \\ y=\sqrt{L^2-\left(\frac{d_2-d_1}{2}+r\right)^2} \end{cases} \tag{9}$$

导轨长度指标为:

$$L_x=2\sqrt{L^2-H^2}-2r+\frac{l}{2}+X_w \tag{10}$$

动平台长度指标为:

当 $r_0 \in \left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{4}\right]$, 即 B_3 位于 B_{11} 与 B_1 之间时,且 $r_0=-\frac{l}{2}$ 时, B_3 与 B_1 重合; $r_0=-\frac{l}{4}$ 时, B_3 与 B_{11} 重合,

$$L_m=B_{11}B_{22}=l \tag{11}$$

当 $r_0 \geq -\frac{l}{4}$, 即 B_3 位于 B_{11} 左侧时,且当 $r_0=-\frac{l}{4}$ 时, B_3 与 B_{11} 重合,

$$L_m=B_3B_1+B_1B_{22}=2r+\frac{l}{2} \tag{12}$$

有效工作空间与机架尺寸比值指标为:

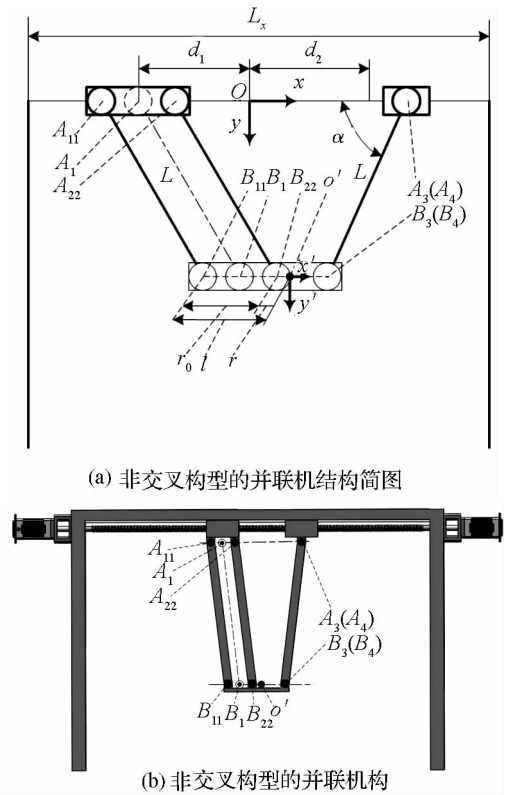
$$\varphi=\frac{L_x \times Y_w}{L_x \times (H+Y_w)}=\frac{X_w \times X_w}{\left(2\sqrt{L^2-H^2}-2r+\frac{l}{2}+X_w\right) \times (H+Y_w)} \tag{13}$$

当 $r>0$ 时,杆 A_1B_1 与杆 A_3B_3 呈一定交叉角度,称此构型为交叉型平面二自由度移动并联机构,由于 $d_2-d_1 \geq 0$,即 $2\sqrt{L^2-y^2}-2r \geq 0$,当动平台在工作空间的下边界,即 $y=H+Y_w$ 处, $2\sqrt{L^2-(H+Y_w)^2}-2r \geq 0$ 仍然成立时,那么对于整个工作空间 $y \in [H, H+Y_w]$,都有 $2\sqrt{L^2-y^2}-2r \geq 0$,此时令 $l_*=\frac{2\sqrt{L^2-(H+Y_w)^2}-l}{2}$,有 $r_0 \leq l_*$,由以上分析可知,满足交叉构型的条件为 $-\frac{l}{2} < r_0 \leq l_*$ 。

(2)当 B_3 位于 B_1 的右侧,且 o' 位于 B_1 的右侧时,如图 5(a)、图 5(b)所示,此时 $r_0 \leq -\frac{l}{2}$ 且 $r \leq 0$ 。

运动学反解为:

$$\begin{cases} d_1=x+r-\sqrt{L^2-y^2} \\ d_2=x-r+\sqrt{L^2-y^2} \end{cases} \tag{14}$$



(a) 非交叉构型的并联机构结构简图

(b) 非交叉构型的并联机构

图5 非交叉构型

运动学正解为：

$$\begin{cases} x = \frac{d_1 + d_2}{2} \\ y = \sqrt{L^2 - \left(\frac{d_2 - d_1}{2} + r\right)^2} \end{cases} \quad (15)$$

导轨长度指标为：

$$L_x = 2 \sqrt{L^2 - H^2} - 2r + \frac{l}{2} + Y_w \quad (16)$$

动平台长度指标为：

当 $r_0 \in [-\frac{3l}{4}, -\frac{l}{2}]$ ，即 B_3 位于 B_{11} 与 B_1 之

间时，且 $r_0 = -\frac{l}{2}$ 时， B_3 与 B_1 重合； $r_0 = -\frac{3l}{4}$ 时， B_3 与 B_{22} 重合，

$$L_m = B_{11}B_{22} = l \quad (17)$$

当 $r_0 \in (-\infty, -\frac{3l}{4}]$ ，即 B_3 位于 B_{11} 左侧时，

且当 $r_0 = -\frac{3l}{4}$ 时， B_3 与 B_{22} 重合，

$$L_m = B_3B_1 + B_1B_{22} = 2r + \frac{l}{2} \quad (18)$$

有效工作空间与机架尺寸比值指标为：

$$\varphi = \frac{Y_w \times Y_w}{L_x \times (H + Y_w)} = \frac{X_w \times Y_w}{(2 \sqrt{L^2 - H^2} - 2r + \frac{l}{2} + X_w) \times (H + Y_w)} \quad (19)$$

当 $r_0 \leq -\frac{l}{2}$ 时，这种构型称为非交叉型平面二自由度移动并联机构。

3 性能图谱分析

3.1 不同构型性能图谱

给定几何参数 $L = 412 \text{ mm}$ ， $l = 100 \text{ mm}$ ， $X_w \times Y_w = 297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$ ($y \in [167 \text{ } 377]$)，此时得到两种构型下各项性能指标，见表1。

图6(a)、图6(b)、图6(c)分别给出了在 $r_0 \in [-3l \text{ } l_*]$ 即 $r_0 \in [-300 \text{ } 116]$ 区域内， L_x 、 L_m 以及 φ 与 r_0 的关系，由图可以得到以下结论：

(1)由图6(a)可以看出，当采用图4(a)、图4(b)所示交叉构型，即 $r_0 > -\frac{l}{2}$ 时，随着 r_0 的增大， L_x 随之减小；当采用图5(a)、图5(b)所示非交叉构型，即 $r_0 \leq -\frac{l}{2}$ 时，随着 r_0 的减小， L_x 随之增大。

(2)由图6(b)可以看出，当 $-\frac{3l}{4} \leq r_0 \leq -\frac{l}{4}$ 时， L_m 为恒值；当 $-\frac{l}{4} < r_0$ 时，随着 r_0 的增大， L_m 随之增大；当 $r_0 < -\frac{3l}{4}$ 时，随着 r_0 的减小， L_m 反而增大。

(3)由图6(c)可以看出 当采用图4(a)、图4(b)所示交叉构型，即 $r_0 > -\frac{l}{2}$ 时，随着 r_0 的增大， φ 随之增大；当采用图5(a)、图5(b)所示非交叉构型，即 $r_0 \leq -\frac{l}{2}$ 时，随着 r_0 的减小， φ 随之减小。

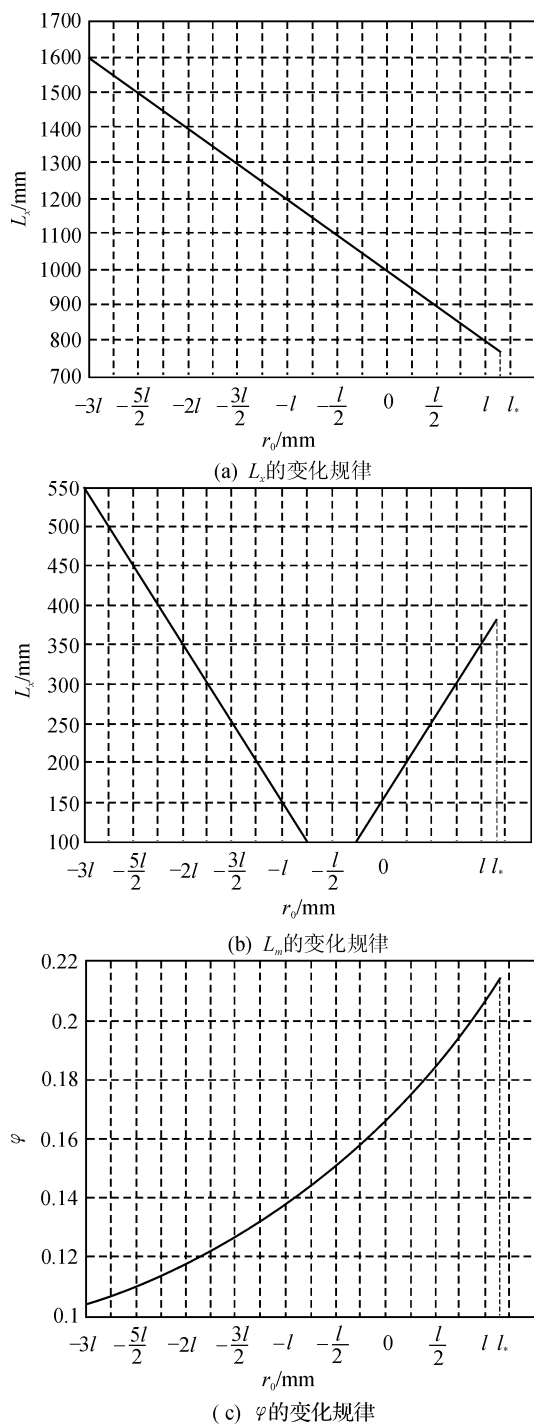
(4)交叉型平面二自由度移动并联机构相对于非交叉型并联机构具有较大的 φ 值以及较小的 L_m 值(表1)。

表1 交叉构型与非交叉构型的性能对比

| r_0/mm | $r_0 \in (-\frac{l_0}{2} + \infty)$ | $r_0 \in (-\infty - \frac{l_0}{2})$ |
|-----------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | $r_0 = -\frac{l_0}{4}$ | $r_0 = -\frac{3l_0}{4}$ |
| L_x/mm | 1 050 | 1 150 |
| L_m/mm | 100 | 100 |
| φ | 0.157 | 0.143 |

3.2 交叉型平面二自由度移动并联机构的性能图谱

针对交叉型平面二自由度移动并联机构具有的特点，分析 φ 、 L_m 以及 L_x 与 l 、 L 以及 r_0 的关系，给出了它们与 l 、 L 以及 r_0 的关系图谱。图7(a)、图7(b)、图7(c)给出了交叉型平面二自由度移动并联机构在给定参数为 $X_w \times Y_w = 297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$ ($y \in [167 \text{ } 377]$) 且 $L = 412$ 时， φ 、 L_m 以及 L_x 与 l 和 r_0 关系。由图7可知，随着 l 或 r_0 的增大， φ 和 L_m 都

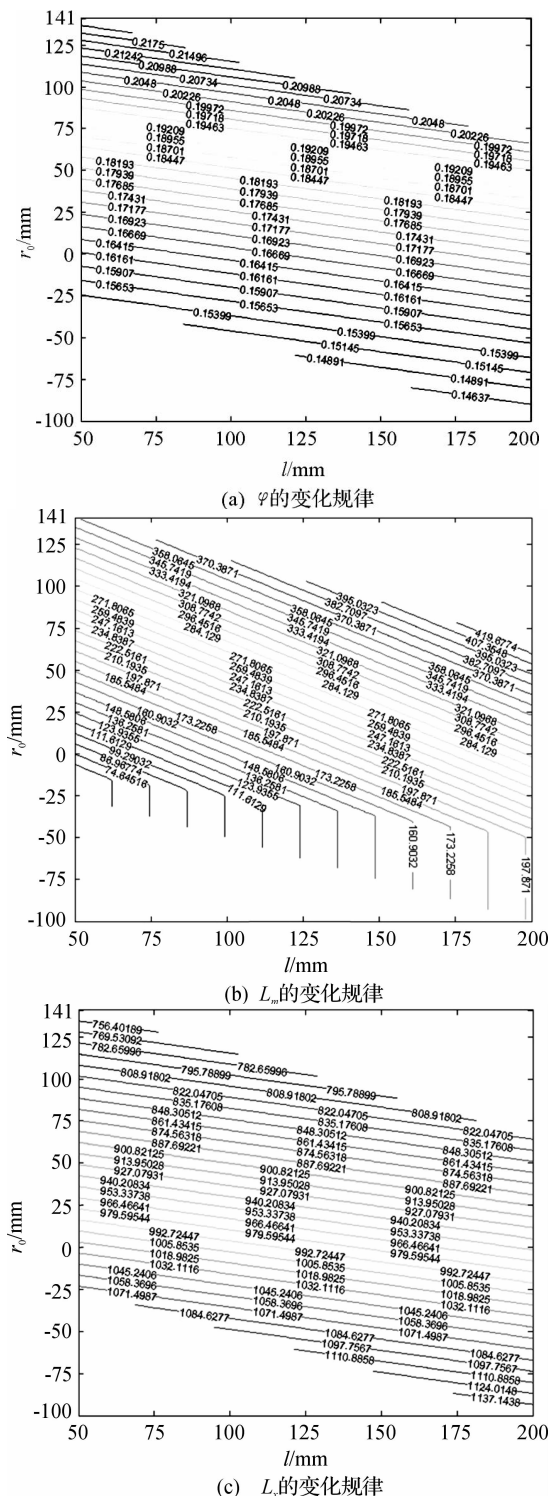
图 6 性能指标与 r_0 的关系

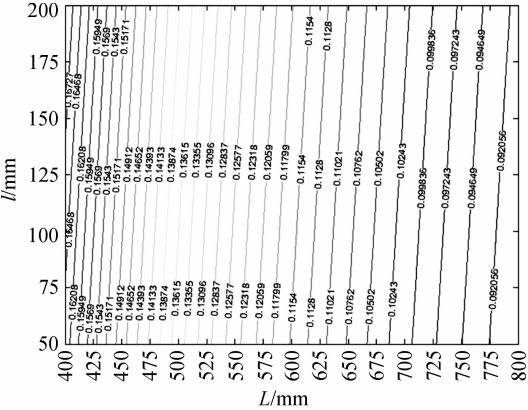
随之增加, L_x 随之减小; 动平台的长度越大, 相应的质量随之增加, 导轨长度越长, 相应的刚度也会变小。图 8(a)、图 8(b)、图 8(c) 和图 9(a)、图 9(b)、图 9(c) 分别给出了交叉型平面二自由度并联机构在给定参数 $X_w \times Y_w = 297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$ ($y \in [167 \sim 377]$) 时, $r_0 = -\frac{l}{8}$ 和 $r_0 = \frac{l}{8}$ 两种情况下, φ 、 L_x 以及 L_m 与 l 、 L 的关系。由图 8、图 9 可得以下结论:

(1) 在 L 和 l 一定时, 较大的 r_0 对应较大的 φ

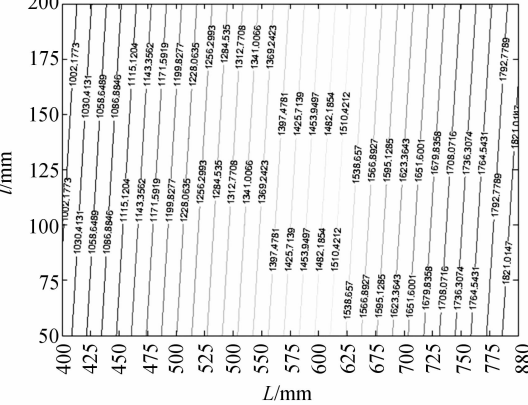
值、较小的 L_x 值以及较大的 L_m 值。

(2) φ 的值随着 l 增大而增大, 随着 L 增大而减小; L_x 的值随着 l 增大而减小, 随着 L 增大而增大; L_m 的值随着 l 增大而增大, 与 L 的变化无关。因此, 在追求较大 φ 的同时, 势必会导致动平台长度 L_m 的增加, 在机构优化设计过程中, 选择 l 、 r_0 以及 L 时, 应充分权衡 φ 、 L_x 以及 L_m 之间的关系。

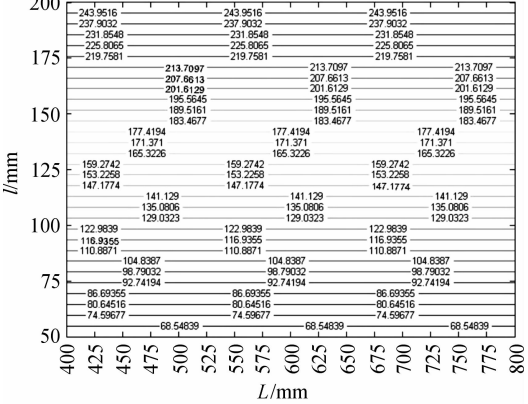
图 7 性能指标与 l 、 r_0 的关系



(a) φ 的变化规律

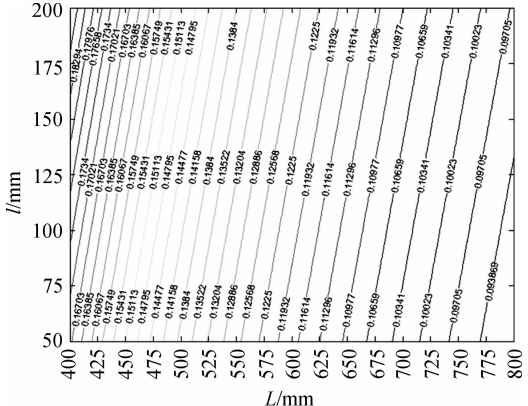


(b) L 的变化规律

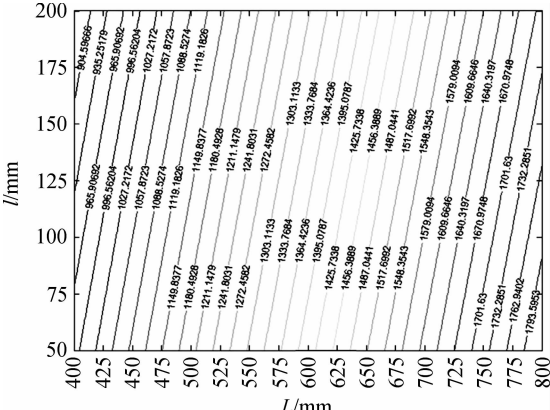


(c) L_m 的变化规律

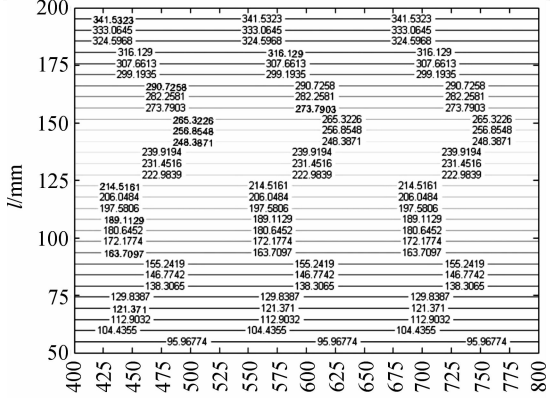
图8 $r_0 = -\frac{l}{8}$ 时,性能指标与 l/L 的关系



(a) φ 的变化规律



(b) L 的变化规律



(c) L_m 的变化规律

图9 $r_0 = \frac{l}{8}$ 时,性能指标与 l/L 的关系

4 结 论

平面二自由度并联机构满足交叉构型的条件是 $r_0 > -\frac{l}{2}$, 相对于非交叉构型的机构, 其具有导轨长度较短、有效工作空间与机架尺寸比值较大等优点, 同时这些性能图谱为该并联机构的优化提供了参考。

参考文献:

[1] Merlet J P. Parallel Robots[M]. Nethenland: Khwer Academic Publishers, 2006.
[2] 李占贤. 高性能平面二自由度并联机器人研究[D]. 天津: 天津大学, 2004.
[3] 彭卫东. IC 芯片粘片机并联焊头机构的运动学动力学分析及实验研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2008.
[4] Liu Xinjun. Kinematics, dynamics and dimensional synthesis of a novel 2-Dof translational manipulator[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications, 2005, 41(4): 205-224.
[5] Alici G. An inverse position analysis of five-bar planar parallel manipulators[J]. Robotica, 2002, 20: 195-362.

- [6] Cervantes-Sánchez J J, Hernández-Rodríguez J C. On the workspace, assembly configurations and singularity curves of the RRRRR-type planar manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35: 1117-1139.
- [7] Cervantes-Sánchez J J, Hernández-Rodríguez J C. On the kinematic design of the 5R planar symmetric manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36: 1031-1313.
- [8] Park F C, Kim J W. Singularity analysis of closed kinematic chains[J]. Journal of Mechanical Design 1999, 121: 32-38.
- [9] Gao Feng, Liu Xinjun, Gruver W A. Performance evaluation of Two-Degree-of-Freedom planar parallel robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33: 661-668.
- [10] Liu Xinjun, Wang Jinsong, Günter P. Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41: 145-169.
- [11] Alici G, Shirinzadeh B. Optimum force balancing with mass distribution and a single elastic element for a five-bar parallel manipulator[C]//In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Taipei, 2003: 3666-3671.
- [12] Liu Xin-jun, Wang Jinsong, Günter Pritschow. On the optimal kinematic design of the PRRRP 2-DOF parallel mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41: 1111-1130.
- [13] Mircea B, Constantinos M. Workspace optimization of 3-legged UPU and UPS parallel platforms with joint constraints[J]. ASME J Mech Des, 2004, 126: 291-301.

Kinematic Performance Analysis of Intersectional Planar 2-DoFs Translation Parallel Manipulator

HAN Yang, HU Ting, LU Ning, LI Qin-chuan

(School of Machinery & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to investigate kinematic performance of a novel planar 2-DoFs translation parallel manipulator. The kinematic model is established and analytical forward and inverse solutions are obtained. Indices of kinematic performance is defined, the expressions of indices of kinematic performance with different architectures are analyzed. The relationship between performance indices and the geometric parameters of mechanism was probed, the corresponding performance atlas has been plotted, the advantage of larger workspace/volume ratio and smaller guide length of this Parallel Manipulator is obtained, these atlas are an important base of reference for the optimal design of this parallel manipulator.

Key words: parallel manipulator; performance indices; performance atlas

(责任编辑: 杨元兆)