浙江理工大学学报，第29卷，第1期，2012年1月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29, No. 1, Jan. 2012

文章编号：1673-3851 (2012) 01-0138-05

H-OWA算子及其在多属性决策中的应用

刘焕章，裴道武

（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：类似于Bonferroni平均算子和BON-OWA算子，分别引入含参量的Heronian平均算子和H-OWA算子，并研究它们的一些性质，如幂等性、单调性及有界性等，并将H-OWA算子应用于多属性决策。

关键词：多属性决策；Bonferroni平均算子；Heronian平均算子；OWA算子

中图分类号：O221　　**文献标识码：**A

0 引　言

多属性决策广泛地应用于解决实际问题，如医疗诊断、投资决策项目评估和武器系统性能评估等，它的一个核心问题是属性值的聚合，为此，人们提出了聚合理论[1-2]。聚合理论研究形形色色的聚合算子，如OWA算子[3]、OWG算子[4]、Heronian平均算子[1]、GOWA算子[5]及Bonferroni平均算子[6]等。这些算子大量地应用于决策理论，并极大地促进了决策理论的发展。

Heronian平均算子是一种十分重要的算子。以往，人们常常将其用于不等式的理论与应用中并得到了大量的研究成果[7-10]。近年来，Beliakov等[1]表明该算子是一种聚合算子，但未做出深入的探究。笔者将推广Heronian平均算子，并得到含参量的Heronian平均算子，该算子的形式类似于Bonferroni平均算子，并与之密切相联。

Bonferroni平均算子于1950提出，但直到最近，它才引起学者们的注意[1,8,11-13]。通过研究Bonferroni平均算子，Yager[11]引入了BON-OWA算子，并将它用于多属性决策中。类似地，笔者将结合含参量的Heronian平均算子与OWA算子，而得到H-OWA算子，并提出一种新的基于H-OWA算子的多属性决策方法。最后，将给出实例分析，并表明该方法的优点。

1 预备知识

定义1[1-2]　设 $I=[0,1]$，若 $f: I^n \to I$ 满足条件：

(i) $f(0,0,\cdots,0)=0$ 且 $f(1,1,\cdots,1)=1$，

(ii) 若 $x \leqslant y$，则 $f(x) \leqslant f(y)$，

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in I^n$ 且 $x \leqslant y$ 表示 $\forall r(r=1,2,\cdots,n)$ 使得 $x_r \leqslant y_r$，则称 f 为一个聚合算子。

有关聚合算子的知识，读者可参考文献[1]和文献[2]。下面介绍一些具体的聚合算子。

定义2[3]　设 $I=[0,1]$，$\mathrm{OWA}: I^n \to I$，与OWA有关的权重向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。若OWA与 W 满足：

(i) $w_i \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，

(ii) $\mathrm{OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)}$，

其中 $x_{(j)}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的第 j 个最大的元素，则称函数OWA为有序加权平均算子，也称为OWA算子。

定义3[5]　设 $I=[0,1]$，$\mathrm{GOWA}: I^n \to I$，与GOWA有关的权重向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。若

收稿日期：2011—03—30

基金项目：国家自然科学基金项目(10871229，60863002)

作者简介：刘焕章(1987—)，男，福建龙岩人，硕士研究生，主要从事非经典逻辑与近似推理研究。

GOWA 与 W 满足:

(i) $w_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$,

(ii) $\mathrm{GOWA}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j (x_{(j)})^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$,

其中 $x_{(j)}$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的第 j 个最大的元素,则称函数 GOWA 为有序加权平均算子,也称为 GOWA 算子。

定义 4[6]　设 $I = [0,1]$, $p, q \geqslant 0$, $B^{p,q}: I^n \to I$。若 $B^{p,q}$ 满足:

$$B^{p,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}},$$

则称函数 $B^{p,q}$ 为 Bonferroni 平均算子。

特别地,当 $p = q = 1$ 时,有[6]

$B^{1,1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)^{\frac{1}{2}}$,式中 $u_i = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j$。

Yager[11] 将 $B^{1,1}$ 与 OWA 算子结合,得到了如下的算子。

定义 5[11]　设 $I = [0,1]$, BON-OWA: $I^n \to I$,与 BON-OWA 有关的权重向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-1})$。若 BON-OWA 与 W 满足:

(i) $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n-1} w_j = 1$,

(ii) $\mathrm{BON\text{-}OWA}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{OWA}_W(B^i)\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $B^i = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$, $\mathrm{OWA}_W(B^i) = \sum_{j=1}^{n-1} w_j x_{i(j)}$,式中 $x_{i(j)}$ 是 B^i 中的第 j 个最大的元素,则称函数 BON-OWA 为 BON-OWA 算子。

该算子[11] 推广了 $B^{1,1}$:当 $w_j = \frac{1}{n-1}(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ 时,

$\mathrm{BON\text{-}OWA}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = B^{1,1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

此外,还有[11]:

(i) 当 $w_1 = 1, w_k = 0 (k = 2, 3, \cdots, n-1)$ 时,

$$\mathrm{BON\text{-}OWA}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{MAX}[B^i]\right)^{\frac{1}{2}},$$

(ii) 当 $w_{n-1} = 1, w_k = 0 (k = 1, 2, \cdots, n-2)$ 时,

$$\mathrm{BON\text{-}OWA}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{MIN}[B^i]\right)^{\frac{1}{2}}。$$

2　含参量的 Heronian 平均算子

引入含参量的 Heronian 平均算子和 H-OWA 算子,并探讨它们的一些基本性质。

定义 6[1]　设 $I = [0,1]$, $H: I^n \to I$,若 H 满足:

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sqrt{x_i x_j}$$

则称函数 H 为 Heronian 平均算子。

类似于 $B^{p,q}$,也可以定义如下的算子。

定义 7　设 $I = [0,1]$, $p, q \geqslant 0$, $B^{p,q}: I^n \to I$,若 $H^{p,q}$ 满足:

$$H^{p,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}},$$

则称函数 $H^{p,q}$ 为含参量的 Heronian 平均算子。

在信息处理中,该算子中的参数 p, q 对数值 x_i, x_j 做了一种类似于几何平均的处理。显然,当 $p = q$ 时,

$$H^{p,p}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(x_i x_j)^p\right)^{\frac{1}{2p}};$$

更进一步地,当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时,

$$H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = H(x_1, x_2, \cdots, x_n)。$$

因此,该算子推广了 Heronian 平均算子。

以下讨论含参量的 Heronian 平均算子的一些基本性质:

性质 1　含参量的 Heronian 平均算子是幂等的,即:

$$H^{p,q}(x, x, \cdots, x) = x。$$

证明　$H^{p,q}(x, x, \cdots, x)$

$$= \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x^p x^q\right)^{\frac{1}{p+q}} = (x^p x^q)^{\frac{1}{p+q}} = x。$$

性质 2　含参量的 Heronian 平均算子是单调的,即若 $x_i \leqslant y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$H^{p,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant H^{p,q}(y_1, y_2, \cdots, y_n)。$$

证明　$H^{p,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}} \leqslant \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} y_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}} \leqslant \left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} y_i^p y_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}} = H^{p,q}(y_1, y_2, \cdots, y_n)。$$

性质 3　含参量的 Heronian 平均算子是有界

的，即：

$$\mathrm{MIN}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant H^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant \mathrm{MAX}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}。$$

证明 $H^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(\mathrm{MAX}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$=\mathrm{MAX}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

类似地，有 $\mathrm{MIN}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant H^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

性质4 设与GOWA有关的权重向量 $W=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，则

$$H^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{n-1}{n+1}[B^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{p+q}+\frac{2}{n+1}[\mathrm{GOWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}.$$

证明 $H^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}x_i^p x_j^q+\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$=\left(\frac{n-1}{n+1}[B^{p,q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{p+q}+\frac{2}{n+1}[\mathrm{GOWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}。$$

从性质1和性质2，可以看出含参量的Heronian平均算子是一个聚合算子。特别地，当 $p=q=1$ 时，有

$$H^{1,1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i x_i\right)^{\frac{1}{2}}，这里\ u_i=\frac{1}{n+1}\left(x_i+\sum_{j=1}^{n}x_j\right)。$$

类似于BON-OWA算子，将 $H^{1,1}$ 与OWA算子结合，可以得到如下算子。

定义8 设 $I=[0,1]$，H-OWA：$I^n\rightarrow I$，与H-OWA有关的权重向量 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_{n+1}\}$。若H-OWA与 W 满足：

(i) $w_j\in[0,1]$，$\sum_{j=1}^{n+1}w_j=1$，

(ii) $\mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{OWA}_W(H^i)\right)^{\frac{1}{2}}$，

其中 $H^i=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$，$\mathrm{OWA}_W(H^i)=\sum_{j=1}^{n+1}w_j x_{i(j)}$，$x_{i(j)}$ 是 H^i 中的第 j 个最大的元素，则称函数H-OWA为H-OWA算子。

以下讨论H-OWA算子的一些基本性质：

性质5 H-OWA算子是幂等的，即：

$$\mathrm{H\text{-}OWA}(x,x,\cdots,x)=x。$$

性质6 H-OWA算子是单调的，即若 $x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant \mathrm{H\text{-}OWA}(y_1,y_2,\cdots,y_n)。$$

性质7 H-OWA算子是有界的，即：

$$\mathrm{MIN}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant \mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant \mathrm{MAX}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}。$$

注1 H-OWA算子3个性质(幂等性、单调性及有界性)的证明分别类似于含参量的Heronian平均算子3个性质(幂等性、单调性及有界性)的证明，故此略去。

从性质5和性质6，可以看出含参量的Heronian平均算子是一个聚合算子。最后，笔者将讨论与H-OWA有关的权重向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_{n+1})$。

(i) 当 $w_j=\frac{1}{n+1}(j=1,2\cdots,n+1)$ 时，

$$\mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=H^{1,1}(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{1}$$

(ii) 当 $w_1=1,w_k=0(k=2,3\cdots,n+1)$ 时，

$$\mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{MAX}[H^i]\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

(iii) 当 $w_{n+1}=1,w_k=0(k=1,2\cdots,n)$ 时，

$$\mathrm{H\text{-}OWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{MIN}[H^i]\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

(iv) 给定一个函数 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$，它满足 $f(0)=0,f(1)=1$ 且单调，则可取

$$w_j=f\left(\frac{j}{n+1}\right)-f\left(\frac{j-1}{n+1}\right)。 \tag{4}$$

3 H-OWA平均算子在多属性决策中的应用

基于H-OWA算子的多属性决策方法，具体步骤如下：

步骤1 对于某一多属性决策问题，设其方案集为 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，其属性集为 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$。对于方案 X_i，按属性 C_j 进行测度，得到 X_i 关于 C_j 的属性值 a_{ij}，从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$。

决策矩阵 A

	C_1	C_2	$\cdots$	C_n
X_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
X_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

步骤 2 利用 H-OWA 算子对各个方案 X_i 的属性值进行聚合，求得其综合属性值 a_i：

$$a_i = \text{H-OWA}(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\,\text{OWA}_W(H^k)\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $H^k = (x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$；$W = (w_1, w_2, \cdots, w_{n+1})$ 是与 H-OWA 有关的权重向量，满足 $w_j \in [0,1]$，$\sum_{j=1}^{n+1} w_j = 1$，可按式(1)～式(4) 适当地选取；$\text{OWA}_W(H^k) = \sum_{l=1}^{n+1} w_l x_{k(l)}$，$x_{k(l)}$ 是 H^k 中的第 l 个最大的元素。

步骤 3 按 a_i 的大小对方案进行排序并择优（a_i 越大，其所对应的方案 X_i 越好）。

注 2　在多属性决策中，属性之间通常是相互关联，可以通过 H-OWA 算子中的 $x_{ik}\text{OWA}_W(H^k)$ 去表示这种关联，这是上述多属性决策方法的一个优点。下面将通过案例对此进行具体的分析。

4　例　　子

例 1[14] 投资银行对某市 4 家企业（方案）$X_i (i = 1,2,3,4)$ 进行投资，抽取下列 5 项指标（属性）进行评估：C_1— 产值；C_2— 投资成本；C_3— 销售额；C_4— 国家收益比重；C_5— 环境污染程度。投资银行考察了上年度 4 家企业的上述指标情况（其中污染程度系有关环保部门历时检测并量化），所得的评估结果如决策矩阵 **A** 所示。在各项指标中，投资成本，环境污染程度为成本型；其他为效益型。属性权重信息未知，试确定最佳投资方案。

决策矩阵 A

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
X_1	0.7455	0.9343	0.6811	1.0000	0.7647
X_2	0.6777	1.0000	0.7246	0.7926	1.0000
X_3	1.0000	0.6189	1.0000	0.7195	0.8667
X_4	0.8749	0.9904	0.9871	0.9024	0.4643

步骤 1　获取决策矩阵 **A**。

步骤 2　利用H-OWA算子对各个方案 $X_i (i=1,2,3,4)$ 的属性值进行聚合，求得其综合属性值 $a_i (i = 1,2,3,4)$（不妨利用式(4) 确定 H-OWA 有关的权重向量 W，取 $f(x) = x^2$，则 $W = \left(\frac{1}{36}, \frac{1}{12}, \frac{5}{36}, \frac{7}{36}, \frac{9}{36}, \frac{11}{36}\right)$）：

$$a_1 = \text{H-OWA}(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) = 0.7937,$$
$$a_2 = \text{H-OWA}(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}) = 0.8042,$$
$$a_3 = \text{H-OWA}(a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}) = 0.8021,$$
$$a_4 = \text{H-OWA}(a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, a_{45}) = 0.8028。$$

步骤 3 按 a_i 的大小对方案进行排序并择优（a_i 越大，其所对应的方案 X_i 越好）

$$a_2 > a_4 > a_3 > a_1,$$

因此最佳企业为 X_2。

步骤 3 中的排序（$a_2 > a_4 > a_3 > a_1$）与文献[14] 的排序（$a_4 > a_2 > a_3 > a_1$）相比较，两者之间略有差异。这是由于 H-OWA 算子考虑了属性之间的关系，如 C_1 与 C_2，C_3，C_4 及 C_5 是相关的。因此，笔者认为上面所提的方法是合理的。

5　结　论

a)类似于 Bonferroni 平均算子，引入了含参量的 Heronian 平均算子并研究它的一些性质：该类算子推广了 Heronian 平均算子；具有幂等性，单调性和有界性；并通过 GOWA 算子与 Bonferroni 平均算子紧密相连。

b) 结合了含参量的 Heronian 平均算子与 OWA 算子，而得到 H-OWA 算子，并研究了它的一些性质。

c)利用 H-OWA 算子，提出了一个新的多属性决策方法，并将之应用于投资银行对某市 4 家企业的选择；同时，表明了该方法的优点：它考虑了方案之间的属性关系。

参考文献：

[1] Beliakov G, Pradera A, Calvo T. Aggregation Functions: a Guide for Practitioners[M]. Berlin; New York: Springer, 2007.

[2] Grabisch M, Marichal J L, Mesiar R, et al. Aggregation Functions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[3] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans Syst, Man, Cybern, 1988, 18(1): 183-190.

[4] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. The ordered weighted geometric operator: properties and application in MCDM Problems[C]//Madrid. Proc of 8th Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, 2000: 985-991.

[5] Yager R R. Generalized OWA aggregation operators [J]. Fuzzy Optimization and Decision Making，2004，3 (1)：93-107.

[6] Bonferroni C. Sulle medie multiple di potenze[J]. Bolletino Matematica Italiana，1950，5(3)：267-270.

[7] Bullen P S，Mitrinovic D S，Vasic M. Means and Their Inequalities[M]. London：Springer，1999.

[8] Bullen P S. Handbook of Means and Their Inequalties [M]. Dordrecht：Kluwer，2003.

[9] Sykora S. Mathematical Means and Averages：Generalized Heronian Means[G]. Sykora S. Stan's Library，2009.

[10] Sykora S. Generalized Heronian Means Ⅱ[G]. Sykora S. Stan's Library，2009.

[11] Yager R R. On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2009，50(8)：1279-1286.

[12] Beliakova G，Jamesa S，Mordelováb J，et al. Generalized Bonferroni mean operators in multi-criteria aggregation[J]. Fuzzy Sets Syst，2010，161(17)：2227-2242.

[13] Xu Z S，Yager R R. Intuitionistic fuzzy Bonferroni means[J]. IEEE Trans Syst Man Cybern，(to appear)，2012.

[14] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

On H-OWA Operators for Multiple Attribute Decision Making

LIU Huan-zhang，*PEI Dao-wu*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：Similar to the Bonferroni mean and BON-OWA operators，the authors introduce the generalized Heronian mean and H-OWA operators and study their basic properties，such as，commutativity，idempotency and boundedness，etc. Also，the authors apply the H-OWA operators in multiple attribute decision making.

Key words：multiple attribute decision making；Bonferroni mean operators；Heronian mean operators；OWA operators

(责任编辑：马春晓)