浙江理工大学学报，第 28 卷，第 5 期，2011 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 28，No. 5，Sept. 2011

文章编号：1673-3851 (2011) 05-0814-05

实封闭域上的代数

徐忠明

（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：在建立了实封闭域 F 上复元素域 C 与四元素体 H 后得到了：(1)全阵代数 F_{2n} 中有子代数同构于 C，全阵代数 F_{4n} 中有子代数同构于 H；(2)F 上代数扩张体只有 F、C 和 H；(3)设 F 是域 K 里上维数有限的真子域，则 F 是实封闭的$\Leftrightarrow K$ 是代数闭域且 $K=F(\sqrt{-1})$；(4)设 A 是 F 上的有限维代数，①若 A 是可除代数，则 A 同构于 F、C 或 H，②若 A 是中心可除代数，则 A 同构于 F 或 H，③若 A 是单代数，则 A 同构于全阵代数 F_n、C_n 与 H_n 中之一，④若 A 是中心单代数，则 A 同构于全阵代数 F_n 或 H_n，⑤若 A 没有非零幂零理想，则 $A=\sum_{i=1}^{l}\oplus M_{n_i}$，其中 $M_{n_i}\in\{F_{n_i},C_{n_i},H_{n_i}\}$，$i=1,2,\cdots,l$。

关键词：实封闭域；全阵代数；可除代数；复元素域；四元素体

中图分类号：O153.3　　　**文献标识码**：A

0　引　言

1843 年 Hamilton 在实数域上构造出乘法不可交换的四元数体后，1877 年 Frobenius 解决了实数域的代数扩张体只能是实数域本身、复数域与四元数体（常称为 Frobenius 定理）。1927 年建立起形式实域的 Artin-Schreier 理论，Artin 肯定地回答了 Hilbert 在 1900 年巴黎国际数学会议上提出的第十七个问题[1]。试问：在一般域上的代数扩张是否有类似 Frobenius 定理的结果？对实封闭域的回答是肯定的（见定理 2）。为此，须建立实封闭域上复元素域和四元素体以及它们的表示（见定理 1）。在此基础上改进了 Artin-Schreier 定理，最后得到了实封闭域上有限维代数的结构定理（见定理 4、5）。

1　实封闭域上全阵代数的一个性质

定义 1[1]　若域 F 有子集 P 满足：(1)$0\notin P$，(2)若 $a\in F$，则必是三者 $a\in P$、$a=0$ 或 $-a\in P$ 中之一，(3)若 a、$b\in P$，则 $a+b\in P$ 且 $ab\in P$，则称 F 是有序域，其中 P 中的元素称为正元素。

易知，当 $a\neq0$ 时 $a^2\in P$，故负单位元 -1 没有平方根，即不存在 $a\in F$ 使得 $a^2=-1$；有序域的特征为 0。有序域也可以称形式实域[1]。

定义 2[1]　若有序域 F 满足

(1)任何正元素在 F 中都有平方根；

(2)任何奇次多项式 $f(x)\in F[x]$ 在 F 中都有零点（即方程 $f(x)=0$ 在 F 中有根），则称 F 是实封闭域。

域 K 称为代数闭域，如果 $K[x]$ 中每个不等于常数的多项式在 K 中至少有一个零点。

命题 1[1]　域 F 是实封闭的当且仅当 $\sqrt{-1}\notin F$ 且 $F(\sqrt{-1})$ 是代数闭域。

该命题显示，实封闭域 F 上的多项式环 $F[x]$ 中首项系数为 1 的既约多项式只能是一次或二次的，且二

收稿日期：2010－07－06

作者简介：徐忠明(1936－)，男，浙江新昌人，大学本科，副教授，主要从事代数的研究。

次多项式 $x^2+bx+c(b、c\in F)$是既约的当且仅当 $b^2-4c<0$ 或 $4c-b^2>0$。

定义 3(定义 3 与定义 4 中 F 可取一般域,且定理 1 仍成立)　设 F 是实封闭域,以 $1、i$(这里 $i^2=-1$ 或 $i=\sqrt{-1}$)为基的向量空间 $F(i)=\{a+bi\mid a,b\in F\}$并规定乘法:$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,$a、b、c、d\in F$ 下,显见 $F(i)$是 F 上二维结合可除代数且乘法可交换、称其为域 F 上的复元素域,记为 $F(i)$、$F(\sqrt{-1})$。为方便起见,下文中记为 C。

定义 4　设 F 是实封闭域,以 $1、i、j、k$ 为基的向量空间 $H=\{a+bi+cj+dk\mid a、b、c、d\in F\}$,并规定乘法如下:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

由直接计算可知,H 是域 F 上单位元为 1 的四维结合可除代数,但乘法不可交换,称为域 F 上四元素体或 F 上四元素代数,下文中记为 H。

设 F 是域,n 为正整数,则 F 上所有 $n\times n$ 矩阵对矩阵的惯常运算构成 F 上 n^2 维代数(本文中"代数"指结合代数),称为域 F 上全阵代数,记为 F_n。其中单位元为 E_n,零元为 0_n(在不会混淆时依次记为 E、0)。全阵代数具有下述性质:

定理 1　设 F 为实封闭域,则

(1)全阵代数 F_{2n}中必有与复元素域C 同构的子代数;

(2)全阵代数 F_{4n}中必有与四元素体 H 同构的子代数。

证明　(1)在 F_{2n}中取矩阵 $E=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$与 $I=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}$,显见在 F_{2n}中由 E、I 生成的子代数 $F(E,I)=\{aE+bI\mid a,b\in F\}$是 F 上的二维可除代数。映射 $aE+bI\to a+bi$ 是 $F(E,I)$到复元素域 $F(i)$的同构,故 F_{2n}中含有与 F 上复元素域 C 同构的子代数。

(2)在 F_{4n}中取矩阵 $E=\begin{pmatrix}E_{2n} & 0\\ 0 & E_{2n}\end{pmatrix}$与 $I=\begin{pmatrix}0 & -E_{2n}\\ E_{2n} & 0\end{pmatrix}$,令矩阵 $J=\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_3 & J_4\end{pmatrix}$(这里 J_i 是 $2n\times 2n$ 矩阵,$i=1,2,3,4$),根据四元素体的要求,J 应满足 $JI=-IJ$ 与 $J^2=-E$。

先由 $JI=-IJ$ 即 $\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_3 & J_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -E_{2n}\\ E_{2n} & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -E_{2n}\\ E_{2n} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_3 & J_4\end{pmatrix}$,计算得 $J_3=J_2$ 与 $J_4=-J_1$,故 $J=\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_2 & -J_1\end{pmatrix}$;

再由 $J^2=-E$ 即 $\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_2 & -J_1\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix}E_{2n} & 0\\ 0 & E_{2n}\end{pmatrix}$,计算得 $J_1^2+J_2^2=-E_{2n}$与 $J_2J_1=J_1J_2$,为简单起见,可取 $J_1=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -2E_n & 0\end{pmatrix}$与 $J_2=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=E_{2n}$,于是

$$J=\begin{pmatrix}0 & E_n & E_n & 0\\ -2E_n & 0 & 0 & E_n\\ E_n & 0 & 0 & -E_n\\ 0 & E_n & 2E_n & 0\end{pmatrix}$$

再取

$$K=IJ=\begin{pmatrix}0 & -E_{2n}\\ E_{2n} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ J_2 & -J_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-J_2 & J_1\\ J_1 & J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E_n & 0 & 0 & E_n\\ 0 & -E_n & -2E_n & 0\\ 0 & E_n & E_n & 0\\ -2E_n & 0 & 0 & E_n\end{pmatrix}。$$

通过计算知 $I^2=J^2=K^2=-E$ 且 $IJ=K=-JI$，$JK=I=-KJ$，$KI=J=-IK$，于是 F_{4n} 中由 E、I、J、K 生成的子代数 $F(E、I、J、K)$ 同构于 F 上四元素体 H，其中同构映射为 $aE+bI+cJ+dK \to a+bi+cj+dk$ ($a、b、c、d \in F$)。(证毕)

注：实数域是实封闭域，故该定理不仅给出了复元素域与四元素体的矩阵表示，同时也给出了实数域上复数域和四元数体的又一矩阵表示。

2 实数域的代数扩张体

如果域 F 上的代数 A 是 F 上 n 维向量空间，则称 A 是 n 维代数(或 n 次代数)，其维数记为 $[A:F]$，即 $[A:F]=n$。代数 A 的子代数 $S=\{a\in A \mid ax=xa, \forall x\in A\}$ 称为 A 的中心。可除代数(也称为体) D 的中心 S 是域，故 D 是其中心 S 上的可除代数。域 F 上的代数 A 若有单元 1，则由挖补定理可把 $F\cdot 1$ 换成 F，故域 F 位于 A 的中心内。注意，后面讨论的单代数和 $N-$半单代数都有单位元[2]。若域 F 上代数 A 的中心 $S=F\cdot 1$，则称 A 为 F 上的中心代数。

设体 K 包含域 F 且 K 中的任意元都是 F 上的代数元，则称 K 是域 F 的代数扩张体。如实封闭域 F 的复元素域 C 和四元素体 H 是 F 的二次和四次的代数扩张体。试问实封闭域 F 的代数扩张体另外还有吗？

定理 2 实封闭域 F 的代数扩张体只有 F 本身、F 上复元素域 C 和 F 上四元素体 H。

证明：设 G 是实封闭域 F 上 n 次代数扩张体，其维数 $[G:F]=n$。

当 $n=1$ 时，显见 $G=F$，即 G 为 F 本身。

当 $n>1$ 时，由命题 1 知 $i=\sqrt{-1}\notin F$ 且是 F 上既约多项式 x^2+1 的零点，故当 $n=2$ 时，F 上的复元素域 $C=F(i)$ 是 F 的二次代数扩张体。

当 $n>2$ 时，则 G 中有元素 $j_0\notin F(i)$ 且 j_0 是某既约多项式 x^2+bx+c 的根且 $r=\sqrt{4c-b^2}>0$，于是，可取 $j_0=\frac{1}{2}(-b+\sqrt{b^2-4c})$，$G$ 中的元素有 $j_1=\frac{1}{r}(2j_0+b)\notin F(i)$ 且 $j_1^2=-1$。因 $i\pm j_1\notin F(i)$ 是二次既约多项式的根，故有等式 $(i+j_1)^2+b_1(i+j_1)+c_1=0$ 与 $(i-j_1)^2+b_2(i-j_1)+c_2=0$ $(b_1,b_2,c_1,c_2\in F)$。展开得

$$\begin{cases} -2+(ij_1+j_1i)+b_1(i+j_1)+c_1=0 \\ -2-(ij_1+j_1i)+b_2(i-j_1)+c_2=0 \end{cases} \tag{1}$$

将它们相加得 $(c_1+c_2-4)+(b_1+b_2)i+(b_1-b_2)j_1=0$，由 $1,i,j_1$ 关于 F 线性无关推得 $b_1+b_2=0$ 且 $b_1-b_2=0$，从而 $b_1=b_2=0$。于是式(1)变为

$$ij_1+j_1i=t_0 \text{(这里 } t_0=2-c_1=c_2-2) \tag{2}$$

①当 $t_0=0$ 时，取 $j=j_1$；

②当 $t_0\neq 0$ 时，取 $j_2=j_1+\frac{t_0}{2}i$，就有 $ij_2+j_2i=(ij_1+j_1i)-t_0=0$，但 $j_2^2=-1+\frac{t_0^2}{4}$ 是负元素(否则 $j_2\in F$，这是不可能的)。记 $j_2^2=-s^2(s\neq 0)$，取 $j=\frac{1}{s}j_2$ 就有 $ij+ji=0$ 且 $j^2=-1$。

不论①和②，再取 $k=ij$，则 $1,i,j,k$ 满足四元素的乘法规则。只要证明 $1,i,j,k$ 关于 F 线性无关，则 G 就含有 F 上四元素体为其子代数。因 $j\notin F(i)$，故 $1,i,j$ 关于 F 线性无关，只需证明 k 不能由 $1,i,j$ 线性表示，对此用反证法。假定 $k=a+bi+cj(a、b、c\in F)$，则 $i=jk=j(a+bi+cj)=aj-b(a+bi+cj)-c=-(ab+c)-b^2i+(a-bc)j$，于是 $(ab+c)+(1+b^2)i+(bc-a)j=0$，由 $1,i,j$ 关于 F 线性无关立得 $1+b^2=0$ 即 $b^2=-1$，这与 F 是实封闭的条件矛盾，因此 $1,i,j,k$ 关于 F 线性无关。于是，当 $n=4$ 时 G 就是 F 上四元素体 H。

最后证明 $n\leqslant 4$。假定 $n>4$，则在 G 中有元素 l 使得 $l^2=-1$ 且 $1,i,j,k,l$ 关于 F 线性无关。同式(2)一样有 $il+li=a$，$jl+lj=b$，$kl+lk=c$(其中 $a、b、c\in F$)，于是 $lk=l(ij)=(a-il)j=aj-i(lj)=aj-i(b-jl)=aj-bi+kl=aj-bi+c-lk$，从而 $aj-bi+c-2lk=0$，再右乘 k 得 $ai+bj+ck+2l=0$，这与 $1,i,j,k,l$ 关于 F 线性无关的假定矛盾。故只有 $n\leqslant 4$。(证毕)

因实数域是实封闭域，故该定理是 Frobenius 定理的推广。

对实封闭域与代数闭域之间关系有一个较好的刻画:

Artin-Schreier 定理[1]　设 K 是代数闭域,F 是 K 里上维数为有限的真子域($[K:F]<\infty$),则 F 是实封闭的且 $K=F(\sqrt{-1})$。

利用定理 2,Artin-Schreier 定理可改进为

定理 3　设 F 是 K 里上维数为有限的真子域($[K:F]<\infty$),则 F 是实封闭域当且仅当 K 是代数闭域且 $K=F(\sqrt{-1})$。

3　实封闭域与代数闭域上代数的结构定理

如果代数 A 除本身与 0 以外没有其他理想且 $A^2\neq 0$,则称 A 是单代数。可除代数与域 F 上全阵代数 F_n 都是单代数。

对单代数有结构定理[2]:(1)A 是域 F 上有限维单代数$\Leftrightarrow A=F_n\otimes D$,其中 D 是 F 上有限维可除代数;(2)若有限维单代数 $A=M\otimes D=M'\otimes D'$,其中 M、M'是 F 上的全阵代数而 D、D'是有限维可除代数,则存在可逆元 $g\in A$,使 $M'=gMg^{-1}$、$D'=gDg^{-1}$。故有限维单代数的张量积分解中,其可除代数部分在同构意义下是唯一确定的,从而把有限维单代数的研究归结为有限维可除代数的研究。于是利用定理 2 可得:

定理 4　设 A 是封闭域 F 上的有限维代数,

(1)若 A 是可除代数,则 A 同构于 F 本身、F 上复元素域 C 或 F 上四元素体 H。

(2)若 A 是中心可除代数,则 A 同构于 F 或 H。

(3)若 A 是单代数,则 A 同构于全阵代数 F_n、F_n 与 F 上复元素域 C 的张量积 $F_n\otimes C$ 或 F_n 与 F 上四元素体 H 的张量积 $F_n\otimes H$。

(4)若 A 是中心单代数,则 A 同构于 $F_n\otimes F$ 或 $F_n\otimes H$。

与域上的向量空间一样可以建立体上的向量空间以及线性表示、线性相关性、维数与基等有关概念[3]。

定理 5　设 A 为实封闭域 F 上的有限维代数,

(1)若 A 是单代数,则 A 同构于下列 3 种全阵代数之一:F_n、C_n与 H_n。

(2)若 A 是中心单代数,则 A 同构于全阵代数 F_n 或 H_n。

(3)若 A 没有非零的幂零理想,则 A 是有限多个全阵代数的直和,这些全阵代数取自 F_n、C_n与 H_n。

证明　(1)设该单代数 $A=F_n\otimes D$,其中可除代数 D 只可能是 F、C 或 H。

当 $D=F$ 时,$A=F_n\otimes D=F_n\otimes F=F_n$,即 $A=F_n$。

当 $D=C$ 时,可仿下面 $D=H$ 时的证明得到 $A=C_n$。

当 $D=H$ 时,设全阵代数 F_n 的 $F-$基由矩阵单位 e_{st},s、$t=1,2,\cdots,n$ 组成,$D=H$ 的 $F-$基为 $d_1=1$,$d_2=i$,$d_3=j$,$d_4=k$,则 $A=F_n\otimes D$ 的 $F-$基为 $e_{st}d_l$,s、$t=1,2,\cdots,n$;$l=1,2,3,4$。A 的任一元 a 有唯一的线性表示:

$$a=\sum_{s,t,l}a_{stl}(e_{st}d_l)=\sum_{s,t}e_{st}\Big(\sum_l a_{stl}d_l\Big)=\Big(\sum_l a_{stl}d_l\Big)_{n\times n}\in H_n$$

(其中 $\forall a_{stl}\in F,\forall \sum_l a_{stl}d_l\in H$)故 $A\subseteq H_n$。反之 H_n 中任一元$\Big(\sum a_{stl}d_l\Big)_{n\times n}=\sum_{s,t}e_{st}\Big(\sum_l a_{stl}d_l\Big)=\sum_{s,t,l}a_{stl}e_{st}d_l\in A$,故 $H_n\subseteq A$。因之 $A=H_n$。

(2)仿(1)可知其结论成立。

(3)没有非零的幂零理想的有限维代数常称为 $N-$半单代数,而有限维代数是 $N-$半单代数当且仅当 A 是有限多个单代数的直和[2]。故利用(1)即得结论。(证毕)

设 K 为代数闭域,则 $K[x]$中每个非常数的多项式都能分解为一次因式的乘积。于是添加代数闭域 K 的任意代数元于 K 得到的代数扩张体仍是 K 的本身。故仿定理 5 可得

推论[2,4]　设 A 是代数闭域 K 上的有限维代数,

(1)若 A 是可除代数,则 $A=K$;

(2)若 A 是单代数,则 $A=K_n$;

(3)若 A 没有非零的幂零理想，则 A 是有限多个 K 上全阵代数 K_{n_i} 的直和 $\sum_{i=1}^{l} \oplus K_{n_i}$。

参考文献：

[1] Jacobson N. Basic Algebra：Ⅱ[M]. San Francisco：W. H. Freeman and company，1980：630-657.

[2] 刘绍学，郭径云，朱　彬，等. 环与代数[M]. 北京：科学出版社，2009：13-79.

[3] 谢邦杰. 抽象代数[M]. 上海：上海科学技术出版社，1982：278-357.

[4] Faith C. Algebra I：Rings，Modules，and Categories[M]. New York：Springer-Verlag Berlin Heidelberg，1981：461-466.

[5] 华罗庚，万哲先. 华罗庚文集：代数卷Ⅰ[M]. 北京：科学技术出版社，2010：1-10.

[6] Shafarevich I R. Notions of Algebra[M]. New York：Springer-Verlag Beidelberg，2005：61-95.

Algebras over Real Closed Field

XU Zhong-ming

(Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：The author constructs complex element field and quartic element division ring over the real closed filed. The following results are obtained：1. Let F be a field，then (1) there is a subalgebras in the total matrix algebra F_{2n} which is isomorphic to the complex element field C over $F(C=F(i))$，(2) there is a subalgebras in the total matrix algebra F_{4n} which is isomorphic to the quartic element division ring H over $F(H=F(1, i, j, k))$. 2. The only algebraic extension division rings over the real closed field F are (1) F，(2) C，and (3) H. 3. Let F be a proper subfield of finite codimensional in the field $K([K:F]<\infty)$. Then F is real closed if and only if Kis algebraically closed and $K=F(\sqrt{-1})$. 4 . Let A be a finite dimensional algebra over the real closed field F，then (1) up to isomorphism the only division algebras A are F，C or H，(2) up to isomorphism the only central division algebras A are F or H. (3) up to isomorphism the only simple algebras A are F_n，C_n or H_n. (4) up to isomorphism the only central simple algebras A are F_n or H_n. (5) If A has no non-zero nilpotent ideals，then A is a direct sum of finitely many total matric algebras M_{n_i} over F，where $M_{n_i} \in \{F_{n_i}, C_{n_i}, H_{n_i}\}$.

Key words：real closed field；total matrix algebra；division algebra；complex element field；quartic element division ring

(责任编辑：马春晓)