

3-PRRU 并联机构的解析雅可比矩阵

王 茹, 陈巧红, 陈 志, 李秦川

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘 要: 并联机构的雅可比矩阵将驱动关节的速度映射为动平台的线速度和角速度,是并联机构性能分析和设计的重要工具。为建立 3-PRRU 并联机构的完整雅可比矩阵,首先运用螺旋理论分析各分支,通过求出各分支的反螺旋系建立约束雅可比矩阵,该矩阵为 3×6 阶长方形;然后锁定并联机构的驱动副后再求出各分支螺旋系的反螺旋系,可求出 3×6 阶驱动雅可比矩阵;最后综合这两个矩阵得到 3-PRRU 并联机的 6×6 阶雅可比矩阵。该矩阵可反映出机构的所有奇异。

关键词: 并联机构; 雅可比矩阵; 螺旋理论

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A

0 引 言

自由度小于 6 的并联机构称为少自由度并联机构^[1]。与传统的 6 自由度并联机构相比,少自由度并联机构具有结构简单,制造成本低,容易控制和速度高等优点,因此吸引了国内外学者的广泛关注,其中 3 自由度并联机构最受关注^[2-4]。

并联机构的雅可比矩阵将驱动关节的速度映射为动平台的线速度和角速度,它是并联机构性能分析和设计的基础。许多机构的性能评价指标,如奇异位形、解耦性、各向同性等都依赖于雅可比矩阵。许多学者对少自由度并联机构雅可比矩阵的建立做了大量研究。

归纳起来,并联机构雅可比矩阵的建立方法主要有 3 种,即:运动学法,三点法和螺旋法。Li Yangmin^[5]采用运动学法对 3-PRS 并联机构建立了雅可比矩阵;Kim 和 Ryu^[6]提出建立雅可比矩阵的三点法,将驱动关节的速度映射为动平台上不共线的 3 个点的 x, y, z 方向的 9 个速度分量;Tsai^[7]根据螺旋理论提出一种雅可比矩阵的建立方法,并用 3-UPU 和 3-RPS 两种并联机构验证了该方法,用螺旋法建立的雅可比矩阵有明确的物理意义,而且提供了关于奇异的全部信息。

本文运用 Tsai^[7]提出的螺旋法建立 3-PRRU 并联机构的雅可比矩阵,给出其解析形式,并得出 3-PRRU 并联机构的 4 种奇异位形。

1 3-PRRU 并联机构的描述

如图 1 所示,3-PRRU 并联机构装配位形如下:动平台平行于定平台;3 个 PRRU 分支机构完全相同,并呈“T”形分布;与动平台相连的 3 个 U 铰中心始终共线。 $\triangle A_1A_2A_3$ 为定平台,动平台为以 P 为圆心 r 为半径的圆。3 个输入 $d_{1,i}$ 垂直于定平台。

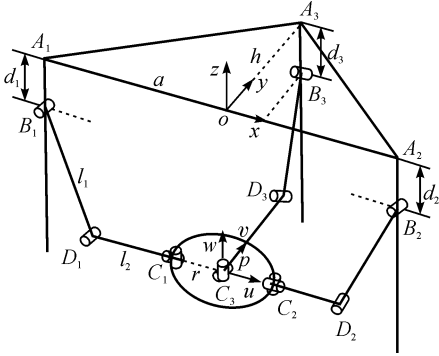


图 1 3-PRRU 并联机构的结构简图

收稿日期: 2010-09-06

基金项目: 国家自然科学基金(50905167);浙江省自然科学基金(R1090134)

作者简介: 王 茹(1986-),女,江苏徐州人,硕士研究生,主要从事并联机器人理论和技术研究。

令 $A_1O=OA_2=a, C_1C_3=C_3C_2=r, B_iD_i=l_1, D_iC_i=l_2, OA_3=h$ 。在 O 点处建立固定坐标系 $Oxyz$ 于定平台上, z 轴垂直于定平台向上, x 轴沿 OA_2 方向, y 轴沿 OA_3 方向。在 C_3 点处建立动坐标系 C_3uvw , w 轴垂直于定平台向上, u 轴沿 C_3D_2 方向, v 轴沿 C_3D_3 方向。另外在 C_3 点处建立瞬时坐标系 $C_3x'y'z'$, 其 x', y', z' 轴始终与定坐标系的 x, y, z 轴平行。令输入 $d=[d_1 \ d_2 \ d_3]^T$, 由机构自身特点可知, C_3 点始终位于 z 轴上。以下的运算都在瞬时坐标系下进行。

文章中公式: c 代表 \cos , s 代表 \sin , t 代表 \tan 。

对 3-PRRU 并联机构进行反解分析, 可求出^[8]

$$\varphi=\arcsin\left(\frac{s\beta}{\sqrt{1-(s\alpha c\beta)^2}}\right) \tag{1}$$

当动平台的位姿确定后, P_z, α, β 的值确定。分析 1, 2, 3 分支, 得:

$$\begin{aligned} d_1 &= P_z + (l_2 + r) s\alpha \pm \sqrt{l_1^2 - [a - (l_2 + r) c\alpha]^2} \\ d_2 &= P_z - (l_2 + r) s\alpha \pm \sqrt{l_1^2 - [a - (l_2 + r) c\alpha]^2} \\ d_3 &= P_z + l_2 s\varphi \pm \sqrt{l_1^2 - (h - l_2 c\varphi)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

对于每个分支, 都有两种情况, 因此反解有 8 组可能解。本文将只取式中“+”的情况进行研究。

2 建立雅可比矩阵

根据螺旋理论, 单位螺旋 $\$$ 可表示为

$$\$(s; s_o) = (l \ m \ n; a \ b \ c) \tag{3}$$

其中, s 表示螺旋轴线方向的单位矢量; l, m, n 是其 3 个方向余弦; s_o 表示线距。

初始位形下动平台与定平台平行。动坐标系绕原点通过旋转矩阵 R 旋转, 到达新的姿态。可通过坐标变换将新姿态下的任意向量变换到瞬时坐标系中。由(1)式得:

$$\begin{bmatrix} l_{4,i} \\ m_{4,i} \\ n_{4,i} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{4,i} \\ m_{4,i} \\ n_{4,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha \\ 0 \\ -s\alpha \end{bmatrix} \ (i=1, 2) \quad \begin{bmatrix} l_{5,3} \\ m_{5,3} \\ n_{5,3} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\alpha c\beta \\ -s\beta \\ c\alpha c\beta \end{bmatrix} \tag{4}$$

由图 2 可知, 支链中各关节的运动螺旋为:

$$\begin{aligned} \$_{1,i} &= (0; s_{1,i}), \$_{2,i} = (s_{2,i}; r_{2,i} \times s_{2,i}), \\ \$_{3,i} &= (s_{3,i}; r_{3,i} \times s_{3,i}), \$_{4,i} = (s_{4,i}; r_{4,i} \times s_{4,i}), \\ \$_{5,i} &= (s_{5,i}; r_{5,i} \times s_{5,i}), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $r_{j,i}$ 表示各运动副中心点在瞬时坐标系下的位置矢量。

2.1 约束雅可比矩阵

与各 PRRU 分支中 5 个运动螺旋均逆的螺旋必是 $\$$ 的反螺旋, 构成约束螺旋系, $\$_{r,1,i}$ 表示第 i 分支的约束螺旋系。

$\$_{r,1,1}=(0 \ 1 \ 0; -rs\alpha \ 0 \ -rc\alpha)^T, \$_{r,1,2}=(0 \ 1 \ 0; rs\alpha \ 0 \ rc\alpha)^T, \$_{r,1,3}=(1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0)^T$, 求 $\$$ 与 $\$_{r,1,i}$ 的互易积, 并写成矩阵形式如下

$$J_c \$ = 0 \tag{6}$$

其中

$$J_c = \begin{bmatrix} \$_{r,1,1}^T \\ \$_{r,1,2}^T \\ \$_{r,1,3}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rs\alpha & 0 & -rc\alpha & 0 & 1 & 0 \\ rs\alpha & 0 & rc\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \$^T = (a \ b \ c; l \ m \ n)$$

式(6)中 J_c 为约束雅可比矩阵, 其行矢量的物理意义为 3 个分支施加在动平台上的 3 个约束力。机构有 3 个自由度, 因此 J_c 的秩为 3。

2.2 驱动雅可比矩阵

锁定各支链中的驱动副, 即移动副。则每条支链的反螺旋系由 1 系螺旋升为 2 系螺旋。该 2 系螺旋包

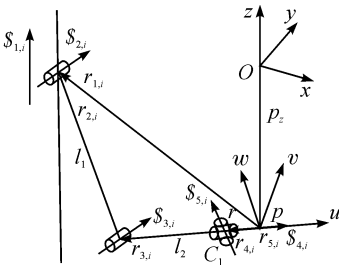


图 2 分支运动螺旋

含原 1 系螺旋。 $\$_{r,2,i}$ 表示第 i 分支的第 2 个反螺旋标准基,即驱动力螺旋。

$$\begin{aligned}\$_{r,2,1} &= \left(-\frac{C}{l_1} \quad 0 \quad \frac{A}{l_1}; \quad \frac{l_2 L s \alpha t \beta}{l_1} \quad \frac{l_{20} L}{l_1} \quad \frac{l_2 L c \alpha t \beta}{l_1}\right)^T; \\ \$_{r,2,2} &= \left(\frac{C}{l_1} \quad 0 \quad \frac{A}{l_1}; \quad \frac{-l_2 M s \alpha t \beta}{l_1} \quad \frac{-l_{20} M}{l_1} \quad \frac{-l_2 M c \alpha t \beta}{l_1}\right)^T; \\ \$_{r,2,3} &= \left(0 \quad \frac{E}{l_1} \quad \frac{B}{l_1}; \quad \frac{l_2 N}{l_1} \quad \frac{-l_2 N s(2\varphi) t \alpha}{2l_1} \quad \frac{l_2 N c^2 \varphi t \alpha}{l_1}\right)^T;\end{aligned}$$

式中: $A=\sqrt{l_1^2-[a-(l_2+r)c\alpha]^2}$; $B=\sqrt{l_1^2-(h-l_2c\varphi)^2}$; $C=\sqrt{l_1^2-A^2}$; $E=h-l_2c\varphi$; $L=c\alpha A-s\alpha C$; $M=c\alpha A+s\alpha C$; $N=Bc\varphi-Es\varphi$; $l_{20}=l_2+r$ 。

求 $\$_i$ 与 $\$_{r,2,i}$ 的互易积,并写成矩阵形式如下:

$$\boldsymbol{J}_x \boldsymbol{\$}_i = \boldsymbol{J}_q \dot{\boldsymbol{d}}_{1,i} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_q &= \begin{pmatrix} \$_{r,2,1}^T \$_{1,1} \\ \$_{r,2,2}^T \$_{1,2} \\ \$_{r,2,3}^T \$_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{l_1} \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{J}_x &= \begin{pmatrix} \$_{r,2,1}^T \\ \$_{r,2,2}^T \\ \$_{r,2,3}^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_2 L s \alpha t \beta}{l_1} & \frac{l_{20} L}{l_1} & \frac{l_2 L c \alpha t \beta}{l_1} & -\frac{C}{l_1} & 0 & \frac{A}{l_1} \\ -\frac{l_2 M s \alpha t \beta}{l_1} & -\frac{l_{20} M}{l_1} & -\frac{l_2 M c \alpha t \beta}{l_1} & \frac{C}{l_1} & 0 & \frac{A}{l_1} \\ \frac{l_2 N}{l_1} & \frac{-l_2 N s(2\varphi) t \alpha}{2l_1} & \frac{l_2 N c^2 \varphi t \alpha}{l_1} & 0 & \frac{E}{l_1} & \frac{B}{l_1} \end{bmatrix};\end{aligned}$$

式(7)两边同乘以 \boldsymbol{J}_q^{-1} 得

$$\dot{\boldsymbol{d}}_{1,i} = \boldsymbol{J}_q^{-1} \boldsymbol{J}_x \boldsymbol{\$}_i = \boldsymbol{J}_a \boldsymbol{\$}_i \tag{8}$$

$$\boldsymbol{J}_a = \begin{bmatrix} l_2 L s \alpha t \beta / A & l_{20} L / A & l_2 L c \alpha t \beta / A & -C / A & 0 & 1 \\ -l_2 M s \alpha t \beta / A & -l_{20} M / A & -l_2 M c \alpha t \beta / A & C / A & 0 & 1 \\ l_2 N / B & -l_2 N s(2\varphi) t \alpha / (2B) & l_2 N c^2 \varphi t \alpha / B & 0 & E / B & 1 \end{bmatrix}$$

\boldsymbol{J}_a 为驱动雅可比,其行矢量的物理意义是 3 个分支施加在动平台上的 3 个驱动力,其秩应等于机构的自由度个数 3。

2.3 完整雅可比矩阵

综合考虑式(6)与式(8)得

$$\dot{\boldsymbol{d}}_i = \boldsymbol{J} \boldsymbol{\$}_i \tag{9}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{d}}_i = [\dot{d}_{1,1} \quad \dot{d}_{1,2} \quad \dot{d}_{1,3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

若 $A \neq 0, B \neq 0$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} l_2 L s \alpha t \beta / A & L l_{20} / A & l_2 L c \alpha t \beta / A & -C / A & 0 & 1 \\ -l_2 M s \alpha t \beta / A & -M l_{20} / A & -l_2 M c \alpha t \beta / A & C / A & 0 & 1 \\ l_2 N / B & -l_2 N s 2 \varphi t \alpha / 2 B & l_2 N c^2 \varphi t \alpha / B & 0 & E / B & 1 \\ -r s \alpha & 0 & -r c \alpha & 0 & 1 & 0 \\ r s \alpha & 0 & r c \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\boldsymbol{J} 为完整雅可比矩阵,它能完全反映动平台的瞬时运动和机构的奇异。 \boldsymbol{J} 的上 3×6 运动子矩阵为动平台的线速度与角速度到机构驱动关节速度的映射, \boldsymbol{J} 的下 3×6 约束子矩阵的秩为 3。

3 奇异性分析

当 $\det(\boldsymbol{J})=0$ 时,机构发生奇异^[7]。由以上求得的完整雅可比矩阵可得

$$\det(\mathbf{J}) = -4r(l_2 + r) s_{\alpha} c_{\alpha} \frac{l_2 [Bc_j - (h - l_2 c_j) s_j] (s_{\alpha} c^2 j t_{\alpha} + c_{\alpha})}{B} \quad (10)$$

分析(10)式可知,机构存在以下几种奇异位形:

a) $r=0$, 此时 \mathbf{J}_c 的秩降为 2, 即 \mathbf{J}_c 发生奇异。需指出的是可以通过选择适当杆长消除机构的这种奇异。即只要保证 r 大于 0, 机构就不会出现该种奇异位形。

b) $c_j = h/(l_2 \pm l_1)$, 此时机构第 3 分支的 l_1, l_2 杆共线。

另外通过观察(7)式可发现当 $A=0$ 或 $B=0$ 时, \mathbf{J}_q 奇异, 此时机构出现奇异位形:

c) $A=0$, 分支 1, 2 的 l_1 杆处于水平状态; $B=0$, 分支 3 的 l_1 杆处于水平状态。

4 结 论

采用螺旋理论的方法对 3-PRRU 并联机构建立 6×6 的完整雅可比矩阵。该 6×6 的雅可比矩阵 \mathbf{J} 的上 3×6 子矩阵将动平台的线速度与角速度映射为驱动关节速度, 下 3×6 子矩阵的秩等于机构的自由度数。通过分析 \mathbf{J} 的行列式值及 \mathbf{J}_q 可以得到 3-PRRU 并联机构所有奇异的发生条件。

参考文献:

- [1] 黄 真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间结构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] Gosselin C, Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1989, 111: 437-445.
- [3] Lee K, Shah D K. Kinematic analysis of a three degrees of freedom in-parallel actuated manipulator[J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(3): 354-360.
- [4] Tsai L W. Direct kinematic analysis of a 3-PRS parallel mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38(1): 71-83.
- [5] Li Yangmin, Xu Qingsong. Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007, 23: 395-408.
- [6] Kim S G, Ryu J. New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19(4): 731-736.
- [7] Tsai L W, Sameer A J. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254-258.
- [8] 张铁牛, 李秦川. 基于 COSMOSMotion 的 3-PRRU 并联机器人运动仿真[J]. 浙江理工大学学报, 2010(6): 885-888.

Screw-Based Analytic Formulation of Jacobian Matrix of 3-PRRU Parallel Mechanism

WANG Ru, CHEN Qiao-hong, CHEN Zhi, LI Qin-chuan

(School of Machinery and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The jacobian matrix of parallel manipulator maps the velocities of actuations into the angular and linear velocities of the moving platform. It's an important tool for performance analysis and design of parallel manipulator. In order to establish the complete jacobian matrix of 3-PRRU parallel manipulator, each single limb kinematic chain was firstly analyzed by screw theory. Jacobian of constraints is obtained through reciprocal basis screw of each single chain, which is a 3×6 non-square matrix. Then, jacobian of actuations is obtained through the second reciprocal basis screw of each single chain where the actuation is locked, which is a 3×6 non-square matrix. Finally, the 6×6 matrix of 3-PRRU parallel manipulator can be established on the basis of the two matrixes. The 6×6 Jacobian matrix provides information about singularities of 3-PRRU parallel manipulator.

Key words: parallel manipulator; jacobian matrix; screw method

(责任编辑: 杨元兆)